Sur quelques équations aux dérivées partielles en lien avec le lemme de Poincaré

THÈSE N^{O} 8616 (2018)

PRÉSENTÉE LE 19 OCTOBRE 2018

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BASE
CHAIRE D'ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS
PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

David Valentin STRÜTT

acceptée sur proposition du jury:

Prof. M. Troyanov, président du jury
Prof. B. Dacorogna, directeur de thèse
Prof. S. Bandyopadhyay, rapporteur
Prof. P. Bousquet, rapporteur
Dr B. Buffoni, rapporteur

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2018

"One of the symptoms af an approaching nervous breakdown is the belief that one's work is terribly important."

-Bertrand Russel

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier le Professeur Bernard Dacorogna qui est sans doute le meilleur enseignant, manager, coach, chercheur et donc directeur de thèse parmi tous les mathématiciens que j'ai pu rencontrer. Écrire une thèse est un processus qui peut devenir extrêmement difficile et j'ai eu la chance que dans ces moments là, la relation à mon directeur de thèse a été une source de soutien et non un souci supplémentaire. Ceux qui ont vécu le milieu académique savent que ceci est rare. Merci à lui aussi pour la confiance qu'il m'a témoignée dans le cadre du cours d'analyse III & IV, où il m'a permis d'endosser toujours plus de responsabilité et de ne pas m'avoir freiné dans mon investissement dans ce cours, qui m'avait déjà passionné alors que j'étais étudiant.

En deuxième je tiens à remercier le Docteur Swarnendu Sil qui a toujours été disponible pour m'aider dans les moments où la réflexion a stagné, pour le nombre incalculable de "sanity checks" qu'il a fait avec moi et également toute l'expérience qu'il a partagée avec moi.

Je tiens aussi à remercier mon jury de thèse, le Professeur Pierre Bousquet, le Docteur Boris Buffoni, le Professeur Saugata Bandhyopadyay et le Professeur Marc Troyanov, qui ont accepté de scruter ma thèse et m'ont transmis de très bonnes remarques.

Ensuite, je tiens à remercier les gens exceptionnels avec qui j'ai pu travailler. Au sein de la chaire d'analyse mathématique et applications et dans le cadre du cours d'analyse III & IV, j'ai eu l'honneur de travailler avec (en plus de personnes déjà mentionnées) Samuel Dubuis, Linda De Cave, Sebastien Basterrechea, Maude Girardin, Quentin Posva, Gautier Leterrier et François Jacopin. Tous ont démontré un engagement dans leur travail qui a rendu la collaboration très facile et j'ai la chance de pouvoir compter la plupart de ces personnes parmi mes amis.

Je tiens également à remercier chaleureusement tout le personnel administratif de la section et l'institut de mathématiques avec qui j'ai pu interagir. Sarah Frulloni, Valérie Kormann, Anna Dietler, Maroussia Schaffner Portillo, Samantha Bettschen, Ariane Cordonier, Corinne Craman, Delphine Vieira, Carine Tschanz, Nadia Kaiser, Cathrine Risse et tout particulièrement Virginie Ledouble. Ces personnes sont très compétentes, disponibles et transforment la bande de marginaux que sont les mathématiciennes et mathématiciens de l'EPFL en une section de mathématiques d'envergure internationale.

Merci aussi à tous les étudiants avec qui j'ai pu discuter dans le cadre du cours d'analyse III & IV, dans le cadre d'un projet de semestre ou au séminaire Burlet.

Bien sûr, une thèse à l'EPFL ne se passe pas sans quelques moments à Satellite, et je tiens à remercier, pour avoir partagé des moments de détente (en plus des personnes déjà mentionnées) Pauline Ruegg-Reymond, Thomas Lugrin, Réda Boumasmoud, Julien Hess, Matthieu Wilhelm, Émile Soutter, Ursina Schweizer, Matthieu Favre, Thimotée Pouchon, Orane Jecker, Simon Lemaire, Fabian Mönkeberg, Alastair Flynn, Thomas Zwahlen, Alessandro Patelli, Adrien Marcone, Carlo Gasparetto, Joachim Moussalli, Julien Ruegg.

Je voudrais également remercier quelques amis du temps de mes études que je revois trop peu souvent mais avec qui on rigole comme si on s'était revu hier et qui m'ont aidé à relativiser certaines choses, Benjamin Horowitz, Robin Dupuis et Grégoire Theurillat.

Pour finir, en dehors du milieu EPFL quelques personnes m'ont soutenues au quotidien et je leur en suis extrêmement reconnaissant, à commencer par mes parents Esther et Bernhard Strütt, qui m'ont soutenu pendant toutes ces années et qui sont toujours d'excellent conseil, mon frère Léon Strütt, ainsi que Gilles "Squallista" Imboden, Jean "Foutre" Ceppi et Ceri "Girl" Sayce.

Merci à tous. Infiniment.

Résumé

Dans cette thèse, on résout deux problèmes distincts.

Dans une première partie, on s'intéresse au système d'équations aux dérivées partielles linéaires

$$dw + a \wedge w = f,$$

dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert, ainsi qu'au système d'équations linéaires

$$da \wedge u = \beta$$

où $a\colon \Omega \to \Lambda^1$, $f\colon \Omega \to \Lambda^{k+1}$ et $\beta\colon \Omega \to \Lambda^{k+2}$ sont donnés et $w, u\colon \Omega \to \Lambda^k$ sont les inconnues. On montre que si $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \geqslant 2(k+1)$, ces deux équations ont au plus une solutions, que si $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \geqslant 2(k+2)$ et $\beta = df + a \wedge f$, elles sont équivalentes et que si $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \geqslant 2(n-k)$, la première équation a toujours une solution. De plus, on construit un opérateur N^k défini sur les $k-1$ formes telles que si $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \geqslant 2(n-k+1)$ et si w est tel que $dw + a \wedge w = 0$, alors il existe φ tel que $N^k(\varphi) = w$.

La première équation peut se voir comme une généralisation du lemme de Poincaré, car dès que a est exacte, on se ramène aisément à ce résultat classique. Néanmoins, dès que a est non-exacte, l'étude du problème devient très différente.

Dans une deuxième partie on s'intéresse au système d'équations aux dérivées partielles linéaires

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F,$$

dans Ω où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ sont donnés et $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ est l'inconnue. On donne des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution de l'équation ci-dessus ainsi que du problème de Dirichlet associé, c'est-à-dire, $u = u_0$ sur $\partial\Omega$. On donne des critères dans le cas où A est symétrique, auquel cas, il s'agit d'une généralisation de l'équation du gradient symétrisé $\nabla u + (\nabla u)^t = F$, dans le cas où A est antisymétrique auquel cas, il s'agit d'une généralisation de l'équation du rotationnel $\nabla u - (\nabla u)^t = F$. Pour finir, on donne des critères d'existences de solutions de l'équation dans le cas où A ne vérifie aucune hypothèse de symétrie.

Mots clés : algèbre extérieure, formes différentielles, équations aux dérivées partielles linéaires, lemme de Poincaré.

Abstract

In this thesis, we solve two different problems.

The first part solves the system of linear partial differential equations

$$dw + a \wedge w = f,$$

in an open set Ω, as well as the linear system of equations

$$da \wedge u = \beta,$$

where $a \colon \Omega \to \Lambda^1$, $f \colon \Omega \to \Lambda^{k+1}$ and $\beta \colon \Omega \to \Lambda^{k+2}$ are given and $w, u \colon \Omega \to \Lambda^k$ are the unknowns. We show that if $\operatorname{rank}[da] \equiv 2m \geqslant 2\,(k+1)$, those equations have at most one solution, if $\operatorname{rank}[da] \equiv 2m \geqslant 2\,(k+2)$ and $\beta = df + a \wedge f$, they are equivalent and if $\operatorname{rank}[da] \equiv 2m \geqslant 2\,(n-k)$ the first equation always admits a solution. Moreover, we build an operator N^k defined on $(k-1)$-forms such that if $\operatorname{rank}[da] \equiv 2m \geqslant 2(n-k+1)$ and w is such that $dw + a \wedge w = 0$, then there exists φ such that $N^k(\varphi) = w$.

The first equation is a generalization of the Poincaré lemma since if a is exact, the solution of this equation are a consequence of this classical result. However, as soon as a is non exact, the study of the problem changes significantly.

The second part solves the system of linear partial differential equations

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F,$$

in Ω, where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $F \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ are given and $u \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ is the unknown. We give necessary conditions and sufficient conditions for existence of solutions of the equation above and the equation together with a boundary Dirichlet condition, that is, $u = u_0$ on the boundary. We give criteria when A is symmetric in which case the equation is a generalization of the symmetric gradient equation $\nabla u + (\nabla u)^t = F$, when A is skew-symmetric in which case the equation is a generalization of the curl equation $\nabla u - (\nabla u)^t = F$. Finally, we give criteria when A doesn't verify any symmetry hypothesis.

Keywords : exterior algebra, differential forms, linear partial differential equations, Poincaré lemma.

Table des matières

Introduction

Un jour, en consultant le flux d'idées hasardeuses qui constitue la plupart du contenu des réseaux sociaux, j'ai lu un "tweet" d'un membre reconnu du milieu académique qui disait :

> Chers doctorants. S'il vous plaît, ne commencez pas l'introduction de votre thèse par une anecdote personnelle.

Dans cette thèse, divisée en deux parties principales, on s'intéresse à l'étude de deux équations différentielles distinctes. Les deux équations étant peu liées, on prendra le soin de les présenter plus en détail dans l'introduction de leurs parties respectives. On se contente ici de les présenter brièvement et de dresser quelques liens.

La première partie de cette thèse est dédiée à l'étude de l'équation

$$dw + a \wedge w = f.$$

Cette équation, écrite dans le formalisme des formes différentielles est évidement liée au lemme de Poincaré dès que a est nulle, ou, plus généralement dès que a est exacte. Dans le cas où a n'est pas exacte, l'apparition du terme $a \wedge w$, malgré le fait qu'il s'agisse d'un terme d'ordre plus bas que dw change drastiquement l'étude du problème. En effet, dans le lemme de Poincaré la condition nécessaire évidente est $df = 0$, tandis que lorsque a est non-fermée, le même procédé qui permet d'établir $df = 0$ dans le cas où $a = 0$ donne qu'une condition nécessaire est l'existence d'une solution u du problème algébrique $da \wedge u = df + a \wedge f$. L'idée principale derrière l'étude de cette équation est d'établir la régularité d'une solution d'un problème algébrique, puis la transformer en une solution de notre équation différentielle.

La deuxième partie de cette thèse concerne l'équation

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F.$$

Dans le cas où on suppose que A est symétrique respectivement antisymétrique, cette équation est équivalente à $\nabla (Au) + \nabla (Au)^t = F$ respectivement $\nabla (Au) - \nabla (Au)^t = F$. Elle est donc liée à l'équation du gradient symétrisé dans le cas où A est symétrique et à l'équation du rotationnel dans le cas où A est antisymétrique. L'équation du rotationnel est un cas particulier du lemme de Poincaré. Résoudre l'équation du gradient symétrisé consiste à résoudre deux équations du gradient successives. Les résultats pour cette équation sont connus dans le cas où on les résout sous une hypothèse de symétrie et d'inversibilité sur A, et si on les résout sur un domaine simplement connexe. On propose ici une amélioration de ces résultats, où on on permet à A d'être dégénérée, le domaine sur lequel on résout les équations ne vérifie pas d'hypothèse topologique et on ajoute une condition de Dirichlet sur le bord. Pour finir, on étudie le problème en abandonnant notre hypothèse de symétrie sur A et en séparant l'équation en partie symétrique et antisymétrique :

$$\begin{cases} A_s\nabla u + (\nabla u)^t A_s = F_s \\ A_a\nabla u + (\nabla u)^t A_a = F_a, \end{cases}$$

où A_s est la partie symétrique de la matrice A et A_a la partie antisymétrique.

Première partie

L'équation $dw + a \wedge w = f$

Chapitre 1

Introduction et résultats principaux

1.1 Introduction

Le but de cette partie est d'étudier le problème suivant. Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On souhaiterait résoudre l'équation

$$dw + a \wedge w = f$$

dans Ω, où $a\colon \Omega \to \Lambda^1$ et $f\colon \Omega \to \Lambda^{k+1}$ sont des formes différentielles données et où $w\colon \Omega \to \Lambda^k$ est l'inconnue.

Pour remettre l'équation dans un contexte plus familier, on constate que dans le cas des 0 formes, l'équation devient l'équation du gradient,

$$\nabla w + aw = f$$

dans le cas des 1 formes dans $\mathbb{R}^3$, l'équation devient équivalente à l'équation du rotationnel

$$\mathrm{rot} w + a \times w = f,$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. Pour finir, dans le cas où $k = n-1$, on obtient une équation équivalente à l'équation de la divergence

$$\mathrm{div} w + \langle a; w\rangle = f.$$

De plus, on peut voir cette équation comme une généralisation du lemme de Poincaré. De manière évidente, si $a = 0$, les solutions de l'équation relèvent du lemme de Poincaré, mais on peut aussi se ramener au lemme de Poincaré dès que a est exacte. En effet, multipliant l'équation par e^A, où $dA = a$, on se ramène à

$$d[e^A w] = e^A f.$$

L'étude de cette équation était originellement un essai pour mieux comprendre l'équation de la dérivée de Lie :

$$d\,(u \lrcorner f) + u \lrcorner df = g,$$

où f et g sont donnés et u est l'inconnue (voir [11].) En effet, cette dernière équation a la structure opérateur d plus un terme linéaire d'ordre 0. Néanmoins, on n'a pas encore réussi à dresser un lien concret entre la dérivée de Lie et notre problème.

Si a n'est pas exacte, notre réflexion sera basée sur les remarques suivantes.

Remarque 1.1. *(i)* Si w est tel que $dw + a \wedge w = f$, alors, $da \wedge w = df + a \wedge f$;

(ii) Si u est tel que $da \wedge u = f$, alors, $w = du + a \wedge u$ vérifie $dw + a \wedge w = f$.

Pour établir ceci, il suffit de constater que si on définit $L_a^k(w) := dw + a \wedge w$ et $\mu_{da}^k(w) := da \wedge w$, pour $w\colon \Omega \to \Lambda^k$, alors, $L_a^{k+1} \circ L_a^k = \mu_{da}^k$.

Dans les deux parties de cette remarque, on peut lire $da \wedge w = df + a \wedge f$ et $da \wedge u = f$ comme da *divise* $df + a \wedge f$, respectivement f. On constate donc que la divisibilité par da joue un rôle important dans l'étude de notre équation. Pour étudier cette notion de divisibilité, on utilisera le théorème de Darboux qui nous permet de se ramener au cas où da est la *forme symplectique standard* de rang $2m$

$$\omega_m = \sum_{i=1}^{m} dx^{2i-1} \wedge dx^{2i},$$

où $2m = \operatorname{rang}[da]$.

Une fois qu'on aura étudié la divisibilité par da on pourra établir le théorème d'existence suivant (voir théorème 3.1.)

Théorème 1.2 (Existence, résultat principal)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $r \geqslant 1$ des entiers, $a \in C^1(\Omega, \Lambda^1)$ et $f \in C^1\left(\Omega, \Lambda^{k+1}\right)$. Alors,

(i) toute solution $w \in C^1$ de

$$dw + a \wedge w = f \tag{P}$$

est solution de

$$da \wedge w = df + a \wedge f; \tag{A}$$

(ii) si $\operatorname{rang}[da] \geqslant 2(k+1)$*, alors* (P) *et* (A) *ont au plus une solution ;*

(iii) si $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \geqslant 2(k+2)$*, $a \in C^{r+2}$ et $f \in C^{r+1}$, alors* (P) *et* (A) *sont équivalentes et admettent au plus une solution $w \in C^r$;*

(iv) si $k \geqslant 1$ et $u \in C^1\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$ est tel que $du \in C^1$ et

$$da \wedge u = f, \tag{B}$$

alors, $w = du + a \wedge u$ est une solution de (P) *;*

(v) si $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \geqslant 2(n-k)$*, $a \in C^{r+3}$ et $f \in C^{r+1}$,* (P) *admet toujours une solution $w \in C^r$.*

Remarque 1.3.
Ce théorème nous donne également une condition suffisante pour l'existence d'une solution de (P) sous l'hypothèse que $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m = 2(k+1)$. En effet, on a alors que la solution de (A) est unique si elle existe. Il suffit donc de tester ce w dans (P), et si on a une solution, alors il s'agit de notre unique solution, et si ce n'est pas une solution, notre problème n'a aucune solution. On montrera qu'il existe des cas où l'équation (P) n'a aucune solution malgré le fait que (A) en admette une.

Remarquons que les points (*iii*) et (*v*) qui nous donnent des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution de (P) supposent une minoration sur le rang de da. Une question qui reste donc ouverte est que se passe-t-il lorsque le rang de da est petit et qu'on n'est pas dans la situation du point (*iv*).

Pour établir ce résultat, on s'intéresse d'abord à deux problèmes algébriques. Premièrement, pour retrouver une solution de $dw + a \wedge w = f$ à partir d'une solution de $da \wedge w = df + a \wedge f$, on aura besoin d'établir une certaine régularité des solutions de $da \wedge w = df + a \wedge f$. Il existe en effet des cas où, si on considère l'équation $\alpha \wedge u = \beta$, avec α et β C^∞, on ne trouve pas de solution u qui soit continue. De plus, on va s'intéresser à déterminer quand la multiplication par da est injective et surjective. On établira donc les deux résultats suivants (voir théorèmes 2.1 et 2.2.)

Théorème 1.4 (Régularité du diviseur)**.**
Soit $r \geqslant 1$, $2 \leqslant 2m \leqslant n$ des entiers, $\alpha \in C^r(\Omega, \Lambda^2)$ et $\beta \in C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^{k+2}\right)$ tels que

(i) $d\alpha = 0$ *sur* Ω *;*

(ii) $\operatorname{rang}[\alpha] = 2m$ *sur* Ω *;*

(iii) pour tout $x \in \Omega$*, il existe* $v \in \Lambda^k$ *tel que*

$$\alpha(x) \wedge v = \beta(x).$$

Alors, il existe $u \in C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ *tel que*

$$\alpha \wedge u = \beta.$$

Théorème 1.5 (Injectivité et surjectivité de la multiplication par une 2-forme)**.**
Soit $\alpha \in \Lambda^2$*, et* $\mu : \Lambda^k \to \Lambda^{k+2}$ *définie par* $\mu(u) = \alpha \wedge u$*. Alors,*

(i) μ *est injective si et seulement si* $\operatorname{rang}[\alpha] \geqslant 2(k+1)$ *;*

(ii) μ *est surjective si et seulement si* $\operatorname{rang}[\alpha] \geqslant 2(n-k-1)$*.*

Le Professeur P. Bousquet a proposé de comparer ce dernier résultat avec [19, Lemme 6.20].

Ces trois résultats ont fait l'objet d'un article, voir [17].

Une dernière chose qui va nous intéresser est l'existence et la surjectivité d'un opérateur noyau. C'est à dire, on s'intéresse à l'existence d'un opérateur $N^k \colon C^2\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right) \to C^1\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ tel que pour tout $\varphi \in C^2\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$, on a $dN^k(\varphi) + a \wedge N^k(\varphi) = 0$ et pour tout $w \in C^1\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ avec $dw + a \wedge w = 0$, on a qu'il existe $\varphi \in C^2\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$ tel que $N^k(\varphi) = w$. Pour essayer d'imiter ce qui se passe dans le cas du lemme de Poincaré où, l'opérateur noyau est l'opérateur différentiel lui-même sur les domaines contractiles, on va essayer de trouver un opérateur noyau qui est donné par la composition de $L_a^{k-1}(\varphi) = d\varphi + a \wedge \varphi$ avec un autre opérateur linéaire. On a obtenu le résultat suivant (voir théorème 4.1.)

Théorème 1.6 (L'opérateur noyau)**.**
Soit $a \in C^1\left(\Omega, \Lambda^1\right)$ *et* $\operatorname{Anh}_{k-1}(da) = \left\{u \in \Lambda^{k-1} \ : \ da \wedge u = 0\right\}$*. Alors,*

(i) l'opérateur

$$L_a^{k-1} \colon C^2\left(\Omega, \operatorname{Anh}_{k-1}(da)\right) \to C^1\left(\Omega, \Lambda^k\right) : \eta \mapsto d\eta + a \wedge \eta$$

vérifie $L_a^k L_a^{k-1}(\eta) = 0$ *pour tout* $\eta \in C^r\left(\Omega, \operatorname{Anh}_{k-1}(da)\right)$ *;*

(ii) si $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m$ *et* $a \in C^{r+2}$*, la projection orthogonale* $\pi_{k-1} \colon \Lambda^{k-1} \to \operatorname{Anh}_{k-1}(da)$ *respecte la régularité. C'est-à-dire, pour tout* $\xi \in C^r\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$*,* $\pi_{k-1}(\xi) : \Omega \to \operatorname{Anh}_{k-1}(da)$ *définie par*

$$\pi_{k-1}(\xi)(x) = \pi_{k-1}(\xi(x))$$

vérifie $\pi_{k-1}(\xi) \in C^r\left(\Omega, \operatorname{Anh}_{k-1}(da)\right)$ *et donc* $N^k := L_a^{k-1} \circ \pi_{k-1}$ *est un opérateur noyau ;*

(iii) si $r \geqslant 4$*,* $a \in C^{r+2}\left(\Omega, \Lambda^1\right)$*,* $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m$ *avec* $m \geqslant n-k+1$ *et que* $w \in C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ *est tel que* $L_a^k(w) = dw + a \wedge w = 0$*, il existe* $\eta \in C^{r-2}\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$ *tel que*

$$d\eta + a \wedge \eta = w.$$

En particulier, pour tout η *comme ci-dessus,* $da \wedge \eta = 0$ *et donc pour tout* $\xi \in C^{r-2}\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$ *tel que* $\pi_{k-1}(\xi) = \eta$*,*

$$N^k(\xi) = w.$$

1.2 Les cas $k = 0, 1, n-1$

Voyons comment se lit le théorème 1.2 dans les trois cas présentés dans l'introduction et quelles sont les améliorations qu'on peut y apporter.

1.2.1 Le cas $k = 0$

Rappelons que dans ce cas là, notre équation (P) devient

$$\nabla w + aw = f. \tag{P$_0$}$$

L'équation (A) quant à elle se lit

$$\left(a^j_{x_i} - a^i_{x_j}\right) w = f^j_{x_i} + a^i f^j - f^i_{x_j} - a^j f^i \tag{A$_0$}$$

pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Cette équation nous donne directement une formule pour w dès que $a^j_{x_i} - a^i_{x_j} \neq 0$. Ainsi, l'unicité et la régularité des solutions de (P_0) et (A_0) sont garanties dès que $da \neq 0$ sur Ω. Ceci nous permet d'abandonner l'hypothèse de rang constant sur da.

Les points (iv) et (v) ne sont pas applicables dans ce cas là, car l'un demande à ce que $k \geqslant 1$ et l'autre demande à ce que le rang de da soit plus grand ou égal à $2n$ ce qui est absurde.

Remarquons encore que comme notre opérateur d est le gradient nous avons une bien meilleure régularité pour notre solution. En effet, si w est une solution C^1 et que a et f sont C^r, on a que $w \in C^{r+1}$, et donc on a la régularité optimale de la solution.

Pour finir, il y a la question de la nature du noyau de notre opérateur différentiel. Or, dans le cas présent, on peut montrer que le noyau est trivial si et seulement si a ne dérive pas d'un potentiel. Et, dans le cas où on trouve $A \in C^1\left(\Omega; \Lambda^0\right)$ tel que $dA = a$, on a que le noyau de notre opérateur est donné par $\left\{Ce^{-A} \ : \ C \in \mathbb{R}\right\}$.

Toutes ces considérations donnent lieu au théorème suivant (voir théorème 5.3.)

Théorème 1.7 ($k = 0$)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe, $r \geqslant 2$, $a \in C^1\left(\Omega, \Lambda^0\right)$ et $f \in C^1\left(\Omega, \Lambda^1\right)$. Alors,

(i) toute solution C^1 de

$$\nabla w + a \cdot w = f \tag{P$_0$}$$

est solution de

$$da \cdot w = df + a \wedge f; \tag{A$_0$}$$

(ii) le noyau de l'opérateur, i.e. l'ensemble des 0 formes C^1, w, telles que $\nabla w + a \cdot w = 0$ est $\{0\}$ si a ne dérive pas d'un potentiel et est $\left\{Ce^{-A} \ : \ C \in \mathbb{R}\right\}$ si A est un potentiel de a sur Ω.

(iii) si da n'est jamais nul, les solutions de (A_0) sont uniques.

(iv) si $\operatorname{rang}[da] \geqslant 4$, $a \in C^r$ et $f \in C^r$, alors (P_0) et (A_0) sont équivalentes et admettent au plus une solution $w \in C^{r+1}$.

1.2.2 Le cas $k = 1$

Dans ce cas là, le point (iii) du théorème 1.2 nous donne de l'information dès que le rang de da est plus grand ou égal à 6. Le point (v) quant à lui nous donne de l'information uniquement dans le cas où $n = 2$, et donc que $k = n - 1$. Le point (iv) est grandement simplifiée dû au fait que $k - 1 = 0$. En effet, l'équation (B) s'écrit

$$\left(a^j_{x_i} - a^i_{x_j}\right) u = f^{ij} \tag{B$_1$}$$

pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Et, comme le cas de l'équation (A_0), si $da \neq 0$, ceci nous donne immédiatement une formule régulière pour u, si il existe. Ceci amène aussi une amélioration du point (v). Malgré le fait que ce point ne peut être utilisé que dans le cas $n = 2$, les hypothèses nécessaires sur a sont sensiblement meilleures. En effet, il suffit de supposer que $a \in C^{r+2}$ et $f \in C^{r+1}$. Ainsi si on prend u une solution de (B_1), on obtient directement que $u \in C^{r+1}$ et donc $w = \nabla u + a \cdot u$ est une solution C^r de $dw + a \wedge w = f$.

Ces considérations donnent lieu au théorème suivant (voir théorème 5.6.)

Théorème 1.8 ($k = 1$)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $r \geqslant 1$ *un entier,* $a \in C^1(\Omega, \Lambda^1)$ *et* $f \in C^1(\Omega, \Lambda^2)$*. Alors*

(i) toute solution de

$$dw + a \wedge w = f \tag{P$_1$}$$

c'est-à-dire

$$w^j_{x_i} - w^i_{x_j} + a^i w^j - a^j w^i = f^{ij}$$

pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$ *est solution de*

$$da \wedge w = df + a \wedge f, \tag{A$_1$}$$

c'est-à-dire

$$\left(a^j_{x_i} - a^i_{x_j}\right) w^l - \left(a^l_{x_i} - a^i_{x_l}\right) w^j + \left(a^l_{x_j} - a^j_{x_l}\right) w^i = f^{ij}_{x_l} - f^{il}_{x_j} + f^{jl}_{x_i} + a^l f^{ij} - a^j f^{il} + a^i f^{jl}$$

pour tout $1 \leqslant i < j < l <\leqslant n$ *;*

(ii) si $\operatorname{rang}[da] \geqslant 4$, (P$_1$) *et* (A$_1$) *ont au plus une solution ;*

(iii) si $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \geqslant 6$, $a \in C^{r+2}$ *et* $f \in C^{r+1}$*, alors* (P$_1$) *et* (A$_1$) *sont équivalentes et admettent au plus une solution* $w \in C^r$ *;*

(iv) si $u \in C^2(\Omega, \Lambda^0)$ *est une solution de*

$$da \wedge u = f, \tag{B$_1$}$$

c'est alors $w = \nabla u + a \cdot u$ *est une solution de* (P$_1$) *;*

(v) si $n = 2$, $da \neq 0$ *dans* Ω, $a \in C^{r+2}$ *et* $f \in C^{r+1}$, (P$_1$) *admet toujours une solution.*

1.2.3 Le cas $k = n - 1$

Dans ce cas là, l'équation (P) devient

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \left(w^{\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}_{x_i} + a^i w^{\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}\right) = f^{\{1,\dots,n\}}, \tag{P$_{n-1}$}$$

ce qui, avec un changement de signe (ou, plus précisément, en utilisant l'opérateur étoile de Hodge) devient équivalent à

$$\operatorname{div} w + \langle a, w\rangle = f, \tag{1.1}$$

qui est étudié, avec une condition au bord, dans [6] avec de bien meilleurs résultats dès que $da \not\equiv 0$. Voir aussi [3].

Dans notre théorème, le point (i) est vide car l'équation (A) met en relation deux $n+1$ formes qui sont toutes nulles. Les hypothèses des points (ii) et (iii) ne peuvent jamais être satisfaites, et il nous reste donc les points (iv) et (v). Dans le cas où le rang de da est constant et plus grand ou égal à 2 le point (v) nous garantit l'existence d'une solution. En réalité, ce point nous dit que les hypothèses du point (iv) sont toujours satisfaites et on obtient donc une solution.

Ces considérations donnent lieu au théorème suivant (voir théorème 5.10.)

Théorème 1.9 ($k = n - 1$)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert. Alors,*

(i) si $a \in C^1(\Omega, \Lambda^1)$, $f \in C^0(\Omega, \Lambda^n)$ *et* $u \in C^1(\Omega, \Lambda^{n-2})$ *est tel que* $du \in C^1$ *et*

$$da \wedge u = f, \tag{B$_{n-1}$}$$

alors $w = du + a \wedge u$ *est une solution de* (P$_{n-1}$) *;*

(ii) si $r \geqslant 1$, $a \in C^{r+3}$, $f \in C^{r+1}$ *et* $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \neq 0$, (P_{n-1}) *admet toujours une solution* $w \in C^r$.

Néanmoins, pour résoudre (1.1) on peut aussi procéder plus directement en résolvant

$$w^1_{x_1} + a^1 w^1 = f$$

puis poser $w = w^1 dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

Dans ce cas là, les hypothèses sur le rang de da sont superflues.

Comme mentionné plus haut, on s'intéressera à trouver un opérateur noyau dans ce cas là. C'est-à-dire un opérateur $N^{n-1} \colon C^r\left(\Omega, \Lambda^{n-2}\right) \to C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^{n-1}\right)$ tel que $L_a^{n-1} \circ N^{n-1} \equiv 0$. Dans [6], la régularité, la surjectivité dans le domaine et la surjectivité sur le bord d'un opérateur d'ordre 2 est discutée. Nous présenterons un opérateur noyau d'ordre 1. Il paraît plus naturel d'avoir un opérateur noyau d'ordre 1 lorsque l'opérateur lui-même est d'ordre 1. Néanmoins, dans [6] les résultats établis couvrent un résultat de plus que ce que nous avons réussi à établir avec notre opérateur noyau. Il y a un résultat de surjectivité de l'opérateur noyau sur le bord (voir [6, Theorem 17]) que nous n'avons pas encore réussi à établir.

Chapitre 2

L'équation $\alpha \wedge u = \beta$

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés de l'équation

$$\alpha \wedge u = \beta$$

où α est une 2 forme fermée donnée, β est une $k+2$ forme donnée et u est notre inconnue.

On aimerait montrer qu'il existe des solutions régulières de cette équation. En effet, les solutions de l'équation ci-dessus sont données point par point. La question est donc, comment garantir que lorsqu'on regarde u comme un champ de k formes, celui-ci ait une quelconque régularité ? On s'intéresse également à déterminer sous quelles conditions la multiplication par une 2-forme est injective ou surjective.

Théorème 2.1 (Régularité du diviseur)**.**
Soit $r \geqslant 1$, $2 \leqslant 2m \leqslant n$ des entiers, $\alpha \in C^r\left(\Omega, \Lambda^2\right)$ et $\beta \in C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^{k+2}\right)$ tels que

(i) $d\alpha = 0$ *sur* Ω *;*

(ii) $\operatorname{rang}[\alpha] = 2m$ *sur* Ω *;*

(iii) pour tout $x \in \Omega$, il existe $v \in \Lambda^k$ tel que

$$\alpha(x) \wedge v = \beta(x).$$

Alors, il existe $u \in C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ tel que

$$\alpha \wedge u = \beta.$$

Théorème 2.2 (Injectivité et surjectivité de la multiplication par une 2-forme)**.**
Soit $\alpha \in \Lambda^2$, et $\mu : \Lambda^k \to \Lambda^{k+2}$ définie par $\mu(u) = \alpha \wedge u$. Alors,

(i) μ est injective si et seulement si $\operatorname{rang}[\alpha] \geqslant 2(k+1)$ *;*

(ii) μ est surjective si et seulement si $\operatorname{rang}[\alpha] \geqslant 2(n-k-1)$.

Remarque 2.3. *(i)* Si on compare les dimensions de Λ^k et Λ^{k+2} qui sont données par $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k+2}$ respectivement, on voit que si $k \leqslant \frac{n}{2} - 1$, on a $\dim \Lambda^k \leqslant \dim \Lambda^{k+2}$, et il y a une chance que μ soit injective. D'un autre côté, si $k \geqslant \frac{n}{2} - 1$, on a $\dim \Lambda^k \geqslant \dim \Lambda^{k+2}$, et il y a donc une chance pour que μ soit surjective. En particulier, on voit que le cas n pair et $k = \frac{n}{2} - 1$ est le seul cas possible où μ peut être à la fois injective et surjective. Et ceci est le cas si le rang de α est égal à n, c'est-à-dire le rang de α est maximal. Dans tous les autres cas, on a donc au plus un des deux points ci-dessus qui peut être vérifié.

(ii) Si $k = 0$, il suffit que $\alpha \neq 0$ pour avoir l'injectivité de μ. Ce qui est logique vu que dans ce cas là, μ est la multiplication par scalaire de α. Le seul cas où il y a surjectivité est quand $n = 2$, que $\alpha \neq 0$, et on est dans la situation décrite ci-dessus où $k = \frac{n}{2} - 1$, et μ est bijective. Néanmoins dans ce cas là, tout est trivial car on travaille sur une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension 1.

(*iii*) Si $k = 1$, il faut que le rang de α soit plus grand ou égal à 4 pour avoir l'injectivité. Les cas où μ n'est pas injective est donc lorsque $\alpha = 0$ et lorsque le rang de α est 2. Pour avoir une chance d'avoir la surjectivité, il faut nécessairement que $2(n - k - 1) \leqslant n$, c'est-à-dire $n \leqslant 4$. Si $n = 2$, on se retrouve dans la situation décrite ci-dessus où $k = \frac{n}{2} - 1$ et le rang de α est maximal. Si $n = 3$ ou 4, on a la surjectivité si le rang de α est plus grand où égal à 2, respectivement 4. Dans tous les cas, on a donc que le rang doit être maximal.

(*iv*) Si $k = n - 2$, on ne peut avoir l'injectivité que si $n = 2$. Par contre, pour avoir la surjectivité, il suffit que $\alpha \neq 0$. À nouveau, le résultat est trivial dans ce cas car le codomaine de μ est un espace vectoriel de dimension 1.

La stratégie pour démontrer ces résultats est de d'abord les montrer dans le cas où α est la forme symplectique standard de rang $2m$

$$\omega_m = \sum_{i=1}^{m} dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}.$$

Le résultat en général consistera donc à une réduction à ce cas là en utilisant le théorème de Darboux pour les 2 formes fermées. Le cas du théorème 2.2 sera immédiat et on n'en donnera donc pas de preuve. La preuve du théorème 2.1, elle, requiert quelques étapes qui seront présentées dans la section 2.2.

2.1 Le cas où $\alpha = \omega_m$

Dans cette section, on s'intéresse donc à l'équation algébrique

$$\omega_m \wedge u = \beta, \tag{2.1}$$

où $\omega_m = \sum_{i=1}^{m} dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}$ est la 2-forme symplectique standard de rang $2m$, $\beta \colon \Omega \to \Lambda^{k+2}$ est un champ de formes différentielles donné et $u \colon \Omega \to \Lambda^k$ est notre inconnue.

Le but de cette section est donc d'établir les résultats suivants.

Théorème 2.4 (Régularité du diviseur, cas symplectique)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant h \leqslant 1$ et $\beta \in C^{r,h}\left(\Omega, \Lambda^{k+2}\right)$ tel qu'il existe $v \colon \Omega \to \Lambda^k$ avec $\omega_m \wedge v = \beta$.

Alors, il existe $u \in C^{r,h}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ tel que

$$\omega_m \wedge u = \beta$$

dans Ω.

De plus, le résultat reste vrai si toutes les occurrences de Ω sont remplacées par $\overline{\Omega}$.

Théorème 2.5.
Soit $\mu \colon \Lambda^k \to \Lambda^{k+2}$ définie par

$$\mu(u) = \omega_m \wedge u.$$

Alors,

(*i*) *μ est injective si et seulement si $m \geqslant k + 1$;*

(*ii*) *μ est surjective si et seulement si $m \geqslant n - k - 1$.*

2.1.1 Existence de solutions régulières

La question de la régularité de la solution est extrêmement technique, et les pages suivantes sont consacrée à la construction d'une solution régulière, lorsqu'il en existe une pas forcément régulière. Voyons dans des cas simples, comment on peut traiter la question.

Exemple 2.6 ($k = 0$)**.**
Lorsque $k = 0$, l'équation (2.1) est alors équivalente à

$$\beta^{2i-1,2i} = u,$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, et

$$\beta^{ij} = 0$$

si $(i,j) \neq (2s-1, 2s)$ pour tout $1 \leqslant s \leqslant m$. La régularité de u est alors immédiate.

Exemple 2.7 ($k = 1$)**.**
Si $k = 1$, l'équation (2.1) devient

$$\beta^{ijk} = \begin{cases} u^k & \text{si } (i,j) = (2s-1,2s) \text{ pour un } 1 \leqslant s \leqslant m \\ u^i & \text{si } (j,k) = (2s-1,2s) \text{ pour un } 1 \leqslant s \leqslant m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $m \geqslant 2$, la régularité de u est immédiate. Si $m = 1$, on a que u^1 et u^2 sont libres. Rien ne nous empêche alors de prendre n'importe quel u^1 et u^2 qui ne soit pas régulier, et on perd la régularité de u. Néanmoins si on choisit $u^1 = u^2 = 0$, alors, u est encore une solution de (2.1), et on a la régularité de u. On voit donc qu'en choisissant u, une solution, il nous faut peut-être la modifier pour en obtenir une autre qui soit régulière. Ici, ce procédé n'est pas difficile car u^1 et u^2 n'ont aucune incidence sur le fait que u soit une solution de (2.1).

Exemple 2.8 ($k = 2$)**.**
Si $k = 2$, l'équation (2.1) devient

$$\beta^{ijpq} = \begin{cases} u^{ij} + u^{pq} & \text{si } (i,j) = (2s_1-1,2s_1) \text{ et } (p,q) = (2s_2-1,2s_2) \text{ pour } 1 \leqslant s_r \leqslant m \\ \\ u^{\{i,j,p,q\}\setminus\{2s-1,2s\}} & \text{si } (i,j) \text{ ou } (j,p) \text{ ou } (p,q) = (2s-1,2s) \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici, si $m = 2$, on a de la liberté pour définir u^{13}, u^{14}, u^{23} et u^{24} ainsi que u^{12} et u^{34}. Pour u^{13}, u^{14}, u^{23} et u^{24}, vu que ces coefficients n'ont pas d'incidence sur la valeur de $da \wedge u$, il est possible qu'ils soient irréguliers. Mais on peut les choisir tous nuls et ainsi avoir que ces coefficients sont réguliers.

D'autre part, u^{12} et u^{34} doivent former une solution de

$$u^{12} + u^{34} = \beta^{1234}.$$

Donc $u^{12} = \chi\beta^{1234}$ et $u^{34} = (1-\chi)\beta^{1234}$, où χ est arbitraire. On voit donc que si χ n'est pas régulier, la solution u n'est pas régulière. Mais, on peut choisir par exemple $\chi = 1/2$, et on a une solution de (2.1) qui est alors régulière.

Si $m = 3$, par exemple, ce problème disparaît car la solution du système

$$\begin{aligned} \beta^{1234} &= u^{12} + u^{34} \\ \beta^{1256} &= u^{12} + u^{56} \\ \beta^{3456} &= u^{34} + u^{56} \end{aligned}$$

est

$$\begin{aligned} u^{12} &= \tfrac{1}{2}\left(\beta^{1234} + \beta^{1256} - \beta^{3456}\right) \\ u^{34} &= \tfrac{1}{2}\left(\beta^{1234} + \beta^{3456} - \beta^{1256}\right) \\ u^{56} &= \tfrac{1}{2}\left(\beta^{1256} + \beta^{3456} - \beta^{1234}\right) \end{aligned}$$

qui est, elle, régulière.

On constate ici que les solutions ont une certaine structure. Il s'agira plus tard de décrire cette structure dans le cadre général.

Exemple 2.9 ($k = n - 2$)**.**
Lorsque $k = n - 2$, l'équation (2.1) est

$$\beta^{1\dots n} = \sum_{s=1}^{m} u^{\{1,\dots,n\}\backslash\{2s-1,2s\}}.$$

Et les solutions sont données par

$$u^{\{1,\dots,n\}\backslash\{2s-1,2s\}} = \chi_s \beta^{1\dots n},$$

où

$$\sum_{s=1}^{m} \chi_s = 1.$$

À nouveau, la régularité de u dépend de la régularité des χ_s. Mais si on prend par exemple $\chi_s = \frac{1}{m}$ pour tout s, on obtient une solution régulière.

On constate donc dans tout ceci que lorsqu'on cherche une solution de (2.1), on est parfois amené à faire des choix. Il faut donc trouver une façon de faire ces choix qui nous garantisse la régularité de u.

Nous passons maintenant à la résolution du problème dans toute sa généralité. Il nous faut introduire des notions et notations pour pouvoir étudier le problème dans sa généralité, et les démonstrations deviennent très techniques. Le but de cette étude est le théorème 2.4, page 12, qui établit la régularité d'une solution de (2.1) ainsi que le théorème 2.5, page 12 qui caractérise la surjectivité et l'injectivité de la multiplication à gauche par ω_m.

Définition 2.10.
Soit $0 \leqslant r \leqslant n$ et $I \in \mathcal{I}_r$. Alors, on définit

(i) la *partie symplectique pure* de I par

$$\tilde{\mathcal{P}}_s(I) = \{i \in \{1, ..., m\} \ : \ \{2i-1, 2i\} \subset I\};$$

(ii) la *partie symplectique* de I par

$$\mathcal{P}_s(I) = \bigcup_{i \in \tilde{\mathcal{P}}_s(I)} \{2i-1, 2i\} \subset I;$$

(iii) la *partie assymplectique* de I par

$$\mathcal{P}_a(I) = I \backslash \mathcal{P}_s(I) \subset I;$$

(iv) la *longueur de la partie symplectique pure* de I par

$$l(I) = \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right|;$$

(*v*) le *sous-système* de I par

$$s(I) = (s_k(I), s_{k+2}(I)),$$

où

$$s_k(I) = \{I' \in \mathcal{I}_k \ : \ \mathcal{P}_a(I') = \mathcal{P}_a(I)\} \quad \text{et} \quad s_{k+2}(I) = \{I' \in \mathcal{I}_{k+2} \ : \ \mathcal{P}_a(I') = \mathcal{P}_a(I)\}.$$

Pour un sous-système $S = s(I)$, on écrit $\mathcal{P}_a(S)$ pour désigner la partie assymplectique de n'importe quel indice du système, $l_k(S)$ pour désigner la longueur de la partie symplectique pure de n'importe quel indice dans $s_k(I)$ et $l_{k+2}(S)$ pour désigner la longueur de la partie symplectique pure de n'importe quel indice dans $s_{k+2}(I)$;

(*vi*) si $I \in \mathcal{I}_{k+2}$, *la réduction* de I par

$$r(I) = \{I \backslash \{2i-1, 2i\} \ : \ i \in \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\};$$

(*vii*) si $I \in \mathcal{I}_k$, *l'élevé* de I par

$$e(I) = \{I \cup \{2i-1, 2i\} \ : \ 1 \leqslant i \leqslant m \text{ tel que } \{2i-1, 2i\} \cap I = \emptyset\}.$$

De plus, pour $S = \{S_k, S_{k+2}\}$ un système, on définit *l'écart* du système S par

$$\text{ecart}(S) = \min_{I_1, I_2 \in S_{k+2}} \left| \tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I_2) \right|$$

Exemple 2.11.
Voyons un exemple pour se fixer les idées. Supposons que $n = 11$, $m = 5$ et $k = 5$. Si on s'intéresse au coefficient $\{1,2,3,4,5,6,11\}$ de l'équation $\omega_m \wedge u = \beta$, on trouve

$$u^{3,4,5,6,11} + u^{1,2,5,6,11} + u^{1,2,3,4,11} = \beta^{1,2,3,4,5,6,11}.$$

La partie assymplectique de tous les indices intervenants est $\{11\}$, ce sera la partie assymplectique du sous-système où cette équation apparaît.

On a que $\mathcal{P}_s(\{1,2,3,4,5,6,11\}) = \{1,2,3,4,5,6\}$, et donc $\tilde{\mathcal{P}}_s(\{1,2,3,4,5,6,11\}) = \{1,2,3\}$.

De plus, $\tilde{\mathcal{P}}_s(\{1,2,5,6,11\}) = \{1,3\}$ par exemple.

On voit que $r(1,2,3,4,5,6,11) = \{\{3,4,5,6,11\}, \{1,2,5,6,11\}, \{1,2,3,4,11\}\}$.

Si on veut écrire le plus petit sous-système clos où notre équation apparaît, on obtient

$$\begin{aligned}
u^{1,2,3,4,11} + u^{1,2,5,6,11} + u^{3,4,5,6,11} &= \beta^{1,2,3,4,5,6,11} \\
u^{1,2,3,4,11} + u^{1,2,7,8,11} + u^{3,4,7,8,11} &= \beta^{1,2,3,4,7,8,11} \\
u^{1,2,3,4,11} + u^{1,2,9,10,11} + u^{3,4,9,10,11} &= \beta^{1,2,3,4,9,10,11} \\
u^{1,2,5,6,11} + u^{1,2,7,8,11} + u^{5,6,7,8,11} &= \beta^{1,2,5,6,7,8,11} \\
u^{1,2,5,6,11} + u^{1,2,9,10,11} + u^{5,6,9,10,11} &= \beta^{1,2,5,6,9,10,11} \\
u^{1,2,7,8,11} + u^{1,2,9,10,11} + u^{7,8,9,10,11} &= \beta^{1,2,7,8,9,10,11} \\
u^{3,4,5,6,11} + u^{3,4,7,8,11} + u^{5,6,7,8,11} &= \beta^{3,4,5,6,7,8,11} \\
u^{3,4,5,6,11} + u^{3,4,9,10,11} + u^{5,6,9,10,11} &= \beta^{3,4,5,6,9,10,11} \\
u^{3,4,7,8,11} + u^{3,4,9,10,11} + u^{7,8,9,10,11} &= \beta^{3,4,7,8,9,10,11} \\
u^{5,6,7,8,11} + u^{5,6,9,10,11} + u^{7,8,9,10,11} &= \beta^{5,6,7,8,9,10,11}
\end{aligned}$$

On voit par exemple que

$$e(\{1,2,3,4,11\}) = \{\{1,2,3,4,5,6,11\}, \{1,2,3,4,7,8,11\}, \{1,2,3,4,9,10,11\}\}$$

représente toutes les équations où l'indice $\{1,2,3,4,11\}$ apparaît. Les indices qui apparaissent avec u sont précisément ceux de $s_k(\{1,2,3,4,11\})$ et ceux qui apparaissent avec β sont les éléments de $s_{k+2}(\{1,2,3,4,11\})$.

Remarque 2.12. (i) Pour $J \in \mathcal{I}_k$ et $I \in \mathcal{I}_{k+2}$, $J \in r(I)$ est équivalent à $I \in e(J)$;

(ii) Le sous-système d'un indice $s(I)$ décrit le plus petit sous-système clos de $\omega_m \wedge u = \beta$ où u^I apparaît si $I \in \mathcal{I}_k$ et le plus petit sous-système où β^I apparaît si $I \in \mathcal{I}_{k+2}$.

De plus, u^J avec $J \in s_k(I)$ sont les inconnues qui apparaissent dans ce sous-système et $\beta^{I'}$ avec $I' \in s_{k+2}(I)$ sont les équations de ce sous-système.

On peut vérifier qu'on a donc

$$|s_{k+2}(I)| = \binom{m - |\mathcal{P}_a(s) \cap \{1, ..., 2m\}|}{l_{k+2}(S)} = \binom{m - |\mathcal{P}_a(s) \cap \{1, ..., 2m\}|}{l_k(S) + 1}$$

équations et

$$|s_k(I)| = \binom{m - |\mathcal{P}_a(s) \cap \{1, ..., 2m\}|}{l_k(S)}$$

inconnues.

(iii) On a $\omega_m \wedge u = \beta$ si et seulement si pour tout $I \in \mathcal{I}_{k+2}$,

$$\beta^I = \sum_{J \in r(I)} u^J.$$

Pour commencer l'étude du problème, on donnera deux résultats qui vont s'intéresser à donner le cardinal de certains sous-ensemble. Ensuite on étudiera séparément deux types de sous-systèmes. On commencera par ceux dont l'écart est plus petit ou égal à 1. On aura alors que le sous-système a plus d'équations que d'inconnues et que les solutions d'un tel système sont uniques. Il s'agira donc de décrire cette solution unique comme une combinaison linéaire des données pour établir le résultat. Dans un deuxième temps, on étudiera les sous-systèmes dont l'écart est plus grand ou égal à 1. Ces systèmes auront plus d'inconnues que d'équation et auront toujours une solution. Pour ces systèmes, il s'agira de choisir une solution qui s'écrit comme une combinaison linéaire des données, avec des coefficients réguliers.

Lemme 2.13.
Soit $S = (S_k, S_{k+2})$ un sous système. Alors,

$$2l_k(S) \leqslant m - 2 - |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}| + \operatorname{ecart}(S) \tag{2.2}$$

$$|e(J)| = m - l_k(S) - |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}| \qquad \textit{pour tout } J \in S_k. \tag{2.3}$$

De plus, si $\operatorname{ecart}(S) \geqslant 1$*, alors, il y a égalité dans* (2.2).

Démonstration. On sépare la preuve en cinq étapes. Premièrement, on définit une injection qui sera très utile, puis on définit une bijection qui le sera tout autant, ensuite on montre (2.2) dans le cas où $\operatorname{ecart}(S) \geqslant 1$, puis dans le cas où $\operatorname{ecart}(S) = 0$, et pour finir, on montrera (2.3).

Étape 1 : On définit $\iota \colon \mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\} \to \{1, ..., m\}$ par

$$\iota(i) = \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor,$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ dénote la partie entière inférieure. Montrons que ι est injective.

Soit donc $i_1 \neq i_2$. Alors, vu que $1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant 2m$, il existe $1 \leqslant s_1, s_2 \leqslant m$ et $0 \leqslant \tau_1, \tau_2 \leqslant 1$ tels que $i_1 = 2s_1 - \tau_1$ et $i_2 = 2s_2 - \tau_2$. Alors,

$$\iota(i_j) = \left\lfloor \frac{i_j + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2s_j - \tau_j + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor s_j + \frac{1 - \tau_j}{2} \right\rfloor = s_j$$

Montrons donc que $s_1 \neq s_2$. Par l'absurde, si $s_1 = s_2$, on distingue deux cas. Si $\tau_1 = \tau_2$, alors, $i_1 = i_2$, ce qui est absurde, et si $\tau_1 \neq \tau_2$, alors sans perte de généralité disons $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0$ et alors $\{2s_1 - 1, 2s_1\} = \{i_1, i_2\} \subset \mathcal{P}_a(S)$, ce qui est également absurde car pour tout $I \in S_k \cup S_{k+2}$, $i_1, i_2 \in \mathcal{P}_a(I)$ mais $\{i_1, i_2\} = \{2s_1 - 1, 2s_1\} \subset \mathcal{P}_s(I)$, ce qui est impossible car la partie symplectique est toujours disjointe de la partie assymplectique d'un indice. On a donc montré que ι est une injection.

Étape 2 : On définit ρ: $\{1, ..., m\} \backslash \left[\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \sqcup \iota(\mathcal{P}_a(J) \cap \{1, ..., m\})\right] \to e(J)$ par

$$\rho(s) = J \sqcup \{2s - 1, 2s\}.$$

Montrons que ρ est bijective.

Commençons par vérifier que l'union dans la définition de ρ est bien disjointe. Pour un indice $s \in \{1, ..., m\} \backslash \left[\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \sqcup \iota(\mathcal{P}_a(J) \cap \{1, ..., m\})\right]$, on distingue trois cas. Si $\{2s - 1, 2s\} \subset J$, alors, $s \in \tilde{\mathcal{P}}_s(J)$, ce qui est absurde. Si $\{2s-1, 2s\} \cap J = \{2s\}$, alors, $s = \iota(2s) \in \iota(\mathcal{P}_a(J) \cap \{1, ..., 2m\})$, ce qui est également impossible. De même si $\{2s-1, 2s\} \cap J = \{2s-1\}$. Ainsi, ρ est bien définie. Montrons qu'il s'agit d'une bijection. L'aspect injectif et trivial. Montrons donc l'aspect surjectif. Soit $I \in e(J)$. Alors, il existe $1 \leqslant s \leqslant m$ tel que $J = \sqcup\{2s-1, 2s\}$. Il faut voir que $s \notin \tilde{\mathcal{P}}_s(J) \sqcup \iota(\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\})$. De façon évidente $s \notin \tilde{\mathcal{P}}_s(J)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $i \in \mathcal{P}_a(S) \cap \{1, .., 2m\}$ tel que $s = \iota(i)$. C'est-à-dire, il existe $\tau \in \{0, 1\}$ tel que $2s - \tau = i \in \mathcal{P}_a(S) = \mathcal{P}_a(I)$. Or, ceci est absurde car $2s - \tau \in \{2s - 1, 2s\} \subset \mathcal{P}_s(I)$ et les parties symplectiques et assymplectiques d'un indice sont disjointes. Ainsi, on a bien montré que ρ est une bijection.

Étape 3 : On montre (2.2) dans le cas $\operatorname{ecart}(S) \geqslant 1$.

Soient alors $I_1, I_2 \in S_{k+2}$ et $\{s_1, ..., s_p\}$ avec $p = \operatorname{ecart}(S)$ tels que

$$\tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I_2) = \{s_1, ..., s_2\}.$$

En particulier, $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I_2)\right| = p = \operatorname{ecart}(S)$. Montrons maintenant que

$$\tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \bigcup \left[\tilde{\mathcal{P}}_s(I_2) \backslash \{s_1, ..., s_p\}\right] \bigcup \iota(\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}) = \{1, ..., m\},$$

et que les unions sont disjointes. Commençons par montrer que les unions sont disjointes. La première l'est trivialement. Montrons donc que la deuxième union est disjointe. Soient $\sigma_1 \in \tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \bigcup \tilde{\mathcal{P}}_s(I_2)$ et $\sigma_2 \in \iota(\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\})$. Par injectivité de ι, il existe un unique $i_2 \in \mathcal{P}_a(I_1) \cap \{1, ..., 2m\}$ tel que $\iota(i_2) = \sigma_2$. De plus, posant $\tau = 1 - 2\left(\frac{i_2+1}{2} - \left\lfloor\frac{i_2+1}{2}\right\rfloor\right) \in \{0, 1\}$, on a $i_2 = 2\sigma_2 - \tau \in \mathcal{P}_a(I_1) \cap \{1, ..., 2m\}$. De plus, puisque $\sigma_1 \in \tilde{\mathcal{P}}_s(I_1)$, on a $\{2\sigma_1 - 1, 2\sigma_1\} \subset \mathcal{P}_s(I_1)$. D'où vu que la partie symplectique d'un indice et sa partie assymplectique sont disjoints, on obtient que

$$i_2 = 2\sigma_2 - \tau \notin \{2\sigma_1 - 1, 2\sigma_1\},$$

et donc que $\sigma_1 \neq \sigma_2$. D'où l'union est disjointe. Montrons maintenant que l'union donne $\{1, ..., m\}$. Le fait que l'union est contenue dans $\{1, ..., m\}$ découle de la définition de la partie symplectique pure et de la définition de ι. Montrons donc l'inclusion inverse. On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe $1 \leqslant s \leqslant m$ tel que $s \notin \tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \cup \tilde{\mathcal{P}}_s(I_2)$ et tel qu'il n'existe aucun $i \in \mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}$ tel que $\iota(i) = s$. Alors, $\{2s - 1, 2s\} \cap \mathcal{P}_a(S) = \emptyset$. En effet, un élément $i \in \{2s - 1, 2s\} \cap \mathcal{P}_a(S)$ vérifierait $\iota(i) = s$. De plus, vu que $s \notin \tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \cup \tilde{\mathcal{P}}_s(I_2)$, en posant $I_2' = [I_2 \cup \{2s - 1, 2s\}] \backslash \{2s_p - 1, 2s_p\}$, on a que $I_2' \in S_{k+2}$ et

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I_2')\right| = |\{s_1, ..., s_{p-1}\}| = p - 1 < \operatorname{ecart}(S),$$

ce qui contredit la minimalité de l'écart du sous-système. On a donc bien montré que l'union donne $\{1, ..., m\}$. Pour finir, prenant le cardinal, on obtient

$$\begin{aligned} m = &\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I_1)\right| + \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I_2)\right| - |\{s_1, ...s_p\}| + |\iota(\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, .., 2m\})| \\ =&2l_{k+2}(S) - p + |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, .., 2m\}| \\ =&2l_k(S) + 2 - \operatorname{ecart}(S) + |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, .., 2m\}|, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat dans le cas où ecart $(S) \geqslant 1$.

Étape 4 : On montre (2.2) dans le cas où ecart $(S) = 0$.

Dans ce cas là, il existe $I_1, I_2 \in S_{k+2}$ tels que $\tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I_2) = \emptyset$. Alors, on a que

$$\tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \bigcup \tilde{\mathcal{P}}_s(I_2) \bigcup \iota(\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}) \subset \{1, ..., 2m\}$$

et que les unions sont disjointes. L'inclusion est évidente et le fait que les unions sont disjointes se montre de façon similaire aux arguments de l'étape 2. Ainsi, prenant le cardinal, on obtient

$$\begin{aligned} m \geqslant & \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I_1)\right| + \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I_2)\right| + |\iota(\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\})| \\ = & 2l_k(S) + 2 + |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}|, \end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité.

Étape 5 : On montre (2.3).

On a

$$\begin{aligned} \{1, ..., m\} = & \{1, ..., m\} \cap \left[\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \sqcup \iota(\mathcal{P}_a(J) \cap \{1, ..., 2m\})\right] \\ & \bigsqcup \{1, ..., m\} \backslash \left[\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \sqcup \iota(\mathcal{P}_a(J) \cap \{1, ..., 2m\})\right] \\ \\ = & \left[\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \sqcup \iota(\mathcal{P}_a(J) \cap \{1, ..., 2m\})\right] \\ & \bigsqcup \{1, ..., m\} \backslash \left[\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \sqcup \iota(\mathcal{P}_a(J) \cap \{1, ..., 2m\})\right] \end{aligned}$$

Or, par l'étape 2, on a $\left|\{1, ..., m\} \backslash \left[\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \sqcup \iota(\mathcal{P}_a(J) \cap \{1, ..., m\})\right]\right| = |e(J)|$. Ainsi,

$$\begin{aligned} m = & \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| + |\mathcal{P}_a(J) \cap \{1, ..., m\}| + \left|\{1, ..., m\} \backslash \left[\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \sqcup \iota(\mathcal{P}_a(J) \cap \{1, ..., m\})\right]\right| \\ = & l(J) + |\mathcal{P}_a(J) \cap \{1, ..., m\}| + |e(J)|, \end{aligned}$$

ce qui démontre notre étape 4 et termine la preuve. □

Remarque 2.14. (*i*) L'équation (2.3) nous donne en particulier que $|e(J)|$ ne dépend que du sous-système et pas de l'indice $J \in S_k$ particulier ;

(*ii*) Si l'écart du sous-système est plus petit ou égal à 1, l'estimation (2.2) devient

$$2l(J) \leqslant m - 1 - |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}|,$$

qui, ensemble avec la remarque 2.12, montre également qu'on a plus d'équations que d'inconnues dans le système.

(*iii*) Dans le cas où l'écart du système est 1, (2.2) et (2.3) donnent en particulier que $|e(J)| = l(J) + 1$. Ceci sera utile pour vérifier la compatibilité de nos résultats plus tard.

Lemme 2.15.

Soit $S = \{S_k, S_{k+2}\}$ un sous-système.

(i) Soit $J, J' \in S_k$ et $0 \leqslant \lambda \leqslant l_k(S) - 1$ tels que $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right| = \lambda$. Alors, pour tout $I \in e(J')$,

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| \in \{\lambda, \lambda + 1\}$$

et

$$\begin{aligned} \left|\left\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| = \lambda\right\}\right| &= |e(J)| - l(J) + \lambda \\ \left|\left\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| = \lambda + 1\right\}\right| &= l(J) - \lambda; \end{aligned}$$

(ii) Soit $I, I' \in S_{k+2}$ *et* $1 \leqslant \lambda \leqslant l_{k+2}(S)$ *tels que* $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda$. *Alors, pour tout* $J \in r(I)$,

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| \in \{\lambda - 1, \lambda\}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda\right\}\right| &= l(I) - \lambda \\ \left|\left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda - 1\right\}\right| &= \lambda;\end{aligned}$$

(iii) Soient $J \in S_k$, $I \in S_{k+2}$ *et* $1 \leqslant \lambda \leqslant l_k(S)$ *tels que* $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = \lambda$. *Alors, pour tout* $J' \in r(I)$,

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| \in \{\lambda - 1, \lambda\}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\left\{J' \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = \lambda\right\}\right| &= l(I) - \lambda \\ \left|\left\{J' \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = \lambda - 1\right\}\right| &= \lambda.\end{aligned}$$

Démonstration. On commence par montrer (i). Soient donc $J, J' \in S_k$ tels que $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right| = \lambda$.

Étape 1 : On montre que pour tout $I \in e(J')$,

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| \in \{\lambda, \lambda + 1\}.$$

Soit donc $I \in e(J')$ quelconque. Alors, il existe $1 \leqslant i \leqslant m$ tel que $\tilde{\mathcal{P}}_s(I) = \tilde{\mathcal{P}}_s(J') \sqcup \{i\}$. On distingue deux cas. Si $i \in \tilde{\mathcal{P}}_s(J)$, alors,

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| = \left|\left(\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right) \sqcup \{i\}\right| = \lambda + 1.$$

Si $i \notin \tilde{\mathcal{P}}_s(J)$, alors,

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| = \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right| = \lambda,$$

ce qui termine de montrer l'étape 1.

Étape 2 : On montre que

$$\left|\left\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| = \lambda + 1\right\}\right| = l(J) - \lambda.$$

On définit $\rho \colon \tilde{\mathcal{P}}_s(J) \backslash \tilde{\mathcal{P}}_s(J') \to e(J')$ par

$$\rho(s) = J' \sqcup \{2s - 1, 2s\}.$$

De façon évidente, ρ est bien définie et injective. Montrons que

$$\rho\left(\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \backslash \tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right) = \left\{I \in e(J') \ : \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = \lambda + 1\right\},$$

en procédant par double inclusion. Si $I \in \rho\left(\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \backslash \tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right)$. Alors, il existe $s \in \tilde{\mathcal{P}}_s(J) \backslash \tilde{\mathcal{P}}_s(J')$ tel que $\tilde{\mathcal{P}}_s(I) = \tilde{\mathcal{P}}_s(J') \sqcup \{s\}$. Ainsi, vu que $s \in \tilde{\mathcal{P}}_s(J)$, on a

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = \left|\left(\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right) \sqcup \{s\}\right| = \lambda + 1,$$

d'où, $I \in \left\{I \in e(J') \ : \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = \lambda + 1\right\}$, et ceci montre une des deux inclusions. Soit maintenant $I \in \left\{I \in e(J') \ : \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = \lambda + 1\right\}$, alors, il existe $1 \leqslant s \leqslant m$ tel que $\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J) = \left(\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right) \sqcup \{s\}$. Vu que l'union est disjointe, on a que $s \notin \tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J')$. Et du fait que

$s \in \tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)$, on a $s \in \tilde{\mathcal{P}}_s(J) \setminus \left(\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right) = \tilde{\mathcal{P}}_s(J) \setminus \tilde{\mathcal{P}}_s(J')$. Et, donc du fait que $I \in e(J')$, on déduit que

$$I = J' \sqcup \{2s-1, 2s\},$$

c'est à dire $I = \rho(s)$, et donc $I \in \rho\left(\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \setminus \tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right)$, ce qui montre l'autre inclusion. Ainsi, du fait que ρ est une bijection, on a

$$\begin{aligned}\left|\left\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| = \lambda + 1\right\}\right| &= \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \setminus \tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right| \\ &= \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \setminus \left(\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right)\right| \\ &= \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| - \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| \\ &= l(J) - \lambda,\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de l'étape 2.

Étape 3 : On montre

$$\left|\left\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| = \lambda\right\}\right| = |e(J)| - l(J) + \lambda.$$

Par l'étape 1, on a

$$\begin{aligned}e(J') = &\left\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| = \lambda\right\} \\ &\bigsqcup \left\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| = \lambda + 1\right\}.\end{aligned}$$

Donc, par l'étape 2, on déduit

$$\left|\left\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| = \lambda\right\}\right| = |e(J')| - (l(J) - \lambda).$$

De plus, par le lemme 2.13, (2.3) on a que $|e(J')| = |e(J)|$, ce qui qui donne le résultat voulu.

Ceci termine la preuve de (i). Passons donc à la preuve de (ii). Soient $I, I' \in S_{k+2}$ et $1 \leqslant \lambda \leqslant l_{k+2}(S)$ tels que $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda$.

Étape 4 : On montre que pour tout $J \in r(I)$,

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| \in \{\lambda - 1, \lambda\}$$

Soit donc $J \in r(I)$ quelconque. Alors, il existe $s \in \tilde{\mathcal{P}}_s(I)$ tel que $\tilde{\mathcal{P}}_s(I) = \tilde{\mathcal{P}}_s(J) \sqcup \{s\}$. On distingue deux cas. Si $s \in \tilde{\mathcal{P}}_s(I')$, alors,

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \left|\left(\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right) \setminus \{s\}\right| = \lambda - 1.$$

De plus, si $s \notin \tilde{\mathcal{P}}_s(I')$, alors

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda,$$

ce qui montre cette étape.

Étape 5 : On montre que

$$\left|\left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda - 1\right\}\right| = \lambda.$$

On définit η: $\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I') \to r(I)$ par

$$\eta(s) = I \setminus \{2s-1, 2s\}.$$

Clairement, η est bien définie et injective. Montrons que

$$\eta\left(\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right) = \left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda - 1\right\}$$

par double inclusion. Soit donc $J' \in \eta\left(\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right)$, c'est-à-dire, il existe $s \in \tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')$ tel que $J' = \eta(s) = I \backslash \{2s-1, 2s\}$. En particulier, $\tilde{\mathcal{P}}_s(J') = \tilde{\mathcal{P}}_s(I) \backslash \{s\}$. Ainsi,

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \left|\left(\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right) \backslash \{s\}\right| = \lambda - 1,$$

d'où $J' \in \left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda - 1\right\}$, ce qui montre une des inclusions. Si maintenant on considère $J' \in \left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda - 1\right\}$ quelconque, alors par définition de $r(I)$, il existe $s \in \tilde{\mathcal{P}}_s(I)$ tel que $J' = I \backslash \{2s-1, 2s\}$. Supposons par l'absurde que $s \notin \tilde{\mathcal{P}}_s(I')$. Alors, on aurait

$$\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda,$$

ce qui entre en contradiction avec le fait que $J' \in \left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda - 1\right\}$. D'où, on a ainsi déduit que $s \in \tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')$, et donc, $J' = I \backslash \{2s-1, 2s\} = \eta(s)$, ce qui montre l'autre inclusion. Pour conclure, on a par bijectivité de η sur son image,

$$\left|\left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda - 1\right\}\right| = \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda,$$

ce qui est le résultat voulu dans cette étape.

Étape 6 : On montre que

$$\left|\left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda\right\}\right| = l(I) - \lambda.$$

Par l'étape 4, on a

$$\begin{aligned} r(I) = &\left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda - 1\right\} \\ &\bigsqcup \left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda\right\}. \end{aligned}$$

Et, par l'étape 5, on déduit

$$\begin{aligned} \left|\left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda\right\}\right| &= |r(I)| - \left|\left\{J \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| = \lambda - 1\right\}\right| \\ &= l(I) - \lambda, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

Pour terminer la preuve, il faut encore montrer (*iii*), mais la preuve est en tout point similaire à la preuve de (*ii*). □

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier les systèmes dont l'écart est plus petit ou égal à 1.

Lemme 2.16 (Les sous-systèmes d'écart plus petit ou égal à 1)**.**
Soit $S = \{S_k, S_{k+2}\}$ un sous système d'écart plus petit où égal à 1.

Si $\left\{u^J\right\}_{J \in S_k}$ est tel que

$$\sum_{J \in r(I)} u^J = \beta^I$$

pour tout $I \in S_{k+2}$, alors nécessairement

$$u^J = \frac{1}{|e(J)|} \sum_{\lambda=0}^{l(J)} \frac{(-1)^\lambda}{\begin{pmatrix} |e(J)| - 1 \\ \lambda \end{pmatrix}} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - \lambda}} \beta^I.$$

En particulier, la solution du sous-système est unique.

Remarque 2.17.
Dans le cas où le sous système est d'écart plus petit ou égal à 1, on a par le lemme 2.13 que $|e(J)|-1 \geqslant l(J)$, ce qui montre que la formule pour u^J ci-dessus est bien définie.

La preuve de ce résultat étant longue et très technique, elle est découpée en plusieurs autres lemmes. Le lecteur soucieux d'économiser du temps est invité à aller directement à l'exemple 2.20, page 26 qui illustre les idées des preuves ci-dessous dans un cas particulier.

Lemme 2.18.
Soit $S = \{S_k, S_{k+2}\}$ *un système d'écart plus petit ou égal à 1,* $\left\{u^J\right\}_{J\in S_k}$ *et* $\left\{\beta^I\right\}_{I\in S_{k+2}}$ *tels que*

$$\sum_{J\in r(I)} u^J = \beta^I.$$

Alors, pour tout $J \in S_k$ *et* $0 \leqslant t \leqslant l(J)-1$,

$$\sum_{\substack{I\in S_{k+2}\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|=l(J)-t}} \beta^I = \sum_{\substack{J'\in S_k\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J')\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|=l(J)-t}} (|e(J)|-t)\, u^{J'} + \sum_{\substack{J'\in S_k\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J')\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|=l(J)-(t+1)}} (t+1)\, u^{J'}.$$

De plus,

$$\sum_{\substack{I\in S_{k+2}\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|=0}} \beta^I = (|e(J)|-l(J)) \sum_{\substack{J'\in S_k\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J')\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|=0}} u^{J'}$$

Démonstration. On sépare la preuve en quatre étapes.

Étape 1 : On montre que pour tout $J \in S_k$ et $0 \leqslant t \leqslant l_k(J)-1$,

$$\sum_{\substack{I\in S_{k+2}\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|=l(J)-t}} \sum_{\substack{J'\in r(I)\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right|=l(J)-t}} u^{J'} = \sum_{\substack{J'\in S_k\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J')\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|=l(J)-t}} (|e(J)|-t)\, u^{J'}.$$

Soit donc $J \in S_k$ et $0 \leqslant t \leqslant l_k(S)-1$. Notant $\chi_A(a) = 1$ si $a \in A$ et $\chi_A(a) = 0$ sinon on a,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{I\in S_{k+2}\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|=l(J)-t}} \sum_{\substack{J'\in r(I)\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right|=l(J)-t}} u^{J'}\\
&= \sum_{\substack{I\in S_{k+2}\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|=l(J)-t}} \sum_{\substack{J'\in S_k\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right|=l(J)-t}} \chi_{r(I)}(J')\, u^{J'}\\
&= \sum_{\substack{J'\in S_k\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J')\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|=l(J)-t}} \left|\left\{I\in S_{k+2} \;:\; \begin{matrix} J'\in r(I) \text{ et}\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-t\end{matrix}\right\}\right| u^{J'}\\
&= \sum_{\substack{J'\in S_k\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J')\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|=l(J)-t}} \left|\left\{I\in e(J') \;:\; \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-t\right\}\right| u^{J'}.
\end{aligned}$$

Or, par le lemme 2.15 (i) avec $\lambda = l(J) - t$, pour tout $J, J' \in S_k$ tels que $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t$ on a

$$\left|\left\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t\right\}\right| = |e(J)| - t,$$

ce qui termine la preuve de cette étape.

Étape 2 : On va montrer que

$$\sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t}} \sum_{\substack{J' \in r(I) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - (t+1)}} u^{J'} = \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - (t+1)}} (t+1) u^{J'}.$$

Comme avant, on a

$$\sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t}} \sum_{\substack{J' \in r(I) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - (t+1)}} u^{J'}$$

$$= \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - (t+1)}} \left|\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t\}\right| u^{J'}$$

Or, par le lemme 2.15 (i) avec $\lambda = l(J) - (t+1)$, on a

$$\left|\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t\}\right| = t + 1,$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.

Étape 3 : Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le premier résultat du lemme, soit que

$$\sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t}} \beta^I = \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t}} (|e(J)| - t) u^{J'}$$

$$+ \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - (t+1)}} (t+1) u^{J'}.$$

En effet, on a, par hypothèse que

$$\sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t}} \beta^I = \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t}} \sum_{J' \in r(I)} u^{J'}.$$

Or, par le lemme 2.15 (iii), on a pour tout $I \in S_{k+2}$ tel que $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t$,

$$\begin{aligned} r(I) = &\left\{J' \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = \lambda\right\} \\ &\bigsqcup \left\{J' \in r(I) \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = \lambda - 1\right\} \end{aligned}$$

D'où, utilisant nos étapes 1 et 2, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t}} \beta^I = &\sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t}} \sum_{\substack{J' \in r(I) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J')\right| = l(J) - t}} u^{J'} \\ &+ \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t}} \sum_{\substack{J' \in r(I) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - (t+1)}} u^{J'} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - t}} \left(|e(J)| - t\right) u^{J'} + \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - (t+1)}} (t+1) u^{J'},$$

ce qui termine la preuve de l'étape 3.

Étape 4 : On va montrer que

$$\sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = 0}} \beta^I = \left(|e(J)| - l(J)\right) \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = 0}} u^{J'}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = 0}} \beta^I &= \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = 0}} \sum_{J' \in r(I)} u^{J'} \\ &= \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = 0}} \left|\left\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = 0\right\}\right| u^{J'}.\end{aligned}$$

Par le lemme 2.15 (i), on a que

$$\left|\left\{I \in e(J') \ : \ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = 0\right\}\right| = |e(J)| - l(J),$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Lemme 2.19.
Soit $S = \{S_k, S_{k+2}\}$ un système d'écart plus petit ou égal à 1, $\left\{u^J\right\}_{J \in S_k}$ et $\left\{\beta^I\right\}_{I \in S_{k+2}}$ tels que

$$\sum_{J \in r(I)} u^J = \beta^I.$$

Alors, pour tout $J \in S_k$ et $0 \leqslant t \leqslant l(J) - 1$,

$$\begin{aligned}u^J =& \frac{1}{|e(J)|} \sum_{\lambda=0}^{t} \frac{(-1)^\lambda}{\begin{pmatrix} |e(J)| - 1 \\ \lambda \end{pmatrix}} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - \lambda}} \beta^I \\ &+ \frac{(-1)^{t+1}}{|e(J)|} \frac{|e(J)| - (t+1)}{\begin{pmatrix} |e(J)| - 1 \\ t+1 \end{pmatrix}} \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - (t+1)}} u^{J'}.\end{aligned}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur t.

Si $t = 0$, l'identité se lit

$$u^J = \frac{1}{|e(J)|} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)}} \beta^I - \frac{1}{|e(J)|} \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - 1}} u^{J'}$$

Or, on a par le lemme 2.18, on a

$$\sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)}} \beta^I = |e(J)| \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)}} u^{J'} + \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - 1}} u^{J'}$$

De plus, la première somme du membre de droite est en réalité une somme sur un seul élément $J' = J$. D'où, on obtient le résultat voulu. Passons maintenant au pas de récurrence. Supposons donc que l'identité

$$u^J = \frac{1}{|e(J)|} \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{(-1)^\lambda}{\binom{|e(J)|-1}{\lambda}} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-\lambda}} \beta^I$$

$$+ \frac{(-1)^t}{|e(J)|} \frac{|e(J)|-t}{\binom{|e(J)|-1}{t}} \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-t}} u^{J'}$$

soit vraie. Alors, par le lemme 2.18, on a

$$\sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-t}} u^{J'} = \frac{1}{|e(J)|-t} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-t}} \beta^I$$

$$- \frac{(t+1)}{|e(J)|-t} \sum_{\substack{J \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-(t+1)}} u^{J'}.$$

Ainsi,

$$\frac{(-1)^t}{|e(J)|} \frac{|e(J)|-t}{\binom{|e(J)|-1}{t}} \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-t}} u^{J'}$$

$$= \frac{(-1)^t}{|e(J)|} \frac{1}{\binom{|e(J)|-1}{t}} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-t}} \beta^I$$

$$+ \frac{(-1)^{t+1}}{|e(J)|} \frac{t+1}{\binom{|e(J)|-1}{t}} \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-(t+1)}} u^{J'}$$

De plus, par les propriétés des coefficients binomiaux, on a

$$\frac{t+1}{\binom{|e(J)|-1}{t}} = \frac{|e(J)|-(t+1)}{\frac{|e(J)|-(t+1)}{t+1}\binom{|e(J)|-1}{t}} = \frac{|e(J)|-(t+1)}{\binom{|e(J)|-1}{t+1}}$$

Remplaçant les expressions dans notre hypothèse de récurrence, on montre que l'identité est vraie pour t, ce qui termine la démonstration de ce lemme. □

Nous sommes maintenant en mesure de donner la démonstration du lemme 2.16.

Démonstration du lemme 2.16. On commence par utiliser le lemme 2.19 dans le cas où $t = l(J) - 1$. On obtient

$$u^J = \frac{1}{|e(J)|} \sum_{\lambda=0}^{l(J)-1} \frac{(-1)^\lambda}{\binom{|e(J)|-1}{\lambda}} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-\lambda}} \beta^I$$

$$+ (-1)^{l(J)} \frac{1}{|e(J)|} \frac{|e(J)| - l(J)}{\binom{|e(J)|-1}{l(J)}} \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = 0}} u^{J'}.$$

Or, par la deuxième partie du lemme 2.18, on a

$$(|e(J)| - l(J)) \sum_{\substack{J' \in S_k \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = 0}} u^{J'} = \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = 0}} \beta^I.$$

Ainsi, on déduit

$$u^J = \frac{1}{|e(J)|} \sum_{\lambda=0}^{l(J)} \frac{(-1)^\lambda}{\binom{|e(J)|-1}{\lambda}} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-\lambda}} \beta^I,$$

qui est précisément l'énoncé du lemme 2.16 □

Exemple 2.20.
Cet exemple illustre les arguments nécessaire à la démonstration du lemme 2.16. Considérons $n = 10$, $m = 5$ et $k = 4$. Le sous-système de $J = \{1, 2, 3, 4\}$ est alors

$$\begin{array}{rl|rl}
u^{1,2,3,4} + u^{1,2,5,6} + u^{3,4,5,6} & = \beta^{1,2,3,4,5,6} & u^{1,2,7,8} + u^{1,2,9,10} + u^{7,8,9,10} & = \beta^{1,2,7,8,9,10} \\
u^{1,2,3,4} + u^{1,2,7,8} + u^{3,4,7,8} & = \beta^{1,2,3,4,7,8} & u^{3,4,5,6} + u^{3,4,7,8} + u^{5,6,7,8} & = \beta^{3,4,5,6,7,8} \\
u^{1,2,3,4} + u^{1,2,9,10} + u^{3,4,9,10} & = \beta^{1,2,3,4,9,10} & u^{3,4,5,6} + u^{3,4,9,10} + u^{5,6,9,10} & = \beta^{3,4,5,6,9,10} \\
 & & u^{3,4,7,8} + u^{3,4,9,10} + u^{7,8,9,10} & = \beta^{3,4,7,8,9,10} \\
u^{1,2,5,6} + u^{1,2,7,8} + u^{5,6,7,8} & = \beta^{1,2,5,6,7,8} & & \\
u^{1,2,5,6} + u^{1,2,9,10} + u^{5,6,9,10} & = \beta^{1,2,5,6,9,10} & u^{5,6,7,8} + u^{5,6,9,10} + u^{7,8,9,10} & = \beta^{5,6,7,8,9,10}
\end{array}$$

Ce système est d'écart 1 comme on peut le voir : pour chaque $I_1, I_2 \in s_{k+2}(J)$, on a au moins un élément dans $\tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I_2)$.

Le système est divisé en trois blocs en regroupant les indices $I \in s_{k+2}(J)$ qui ont la même valeur pour $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|$. Dans le premier bloc cette valeur est $l(J) = 2$, dans le deuxième elle est 1 est dans le troisième elle est 0.

La première étape qui est équivalente à établir le résultat du lemme 2.19 pour $t = 0$ est de sommer toutes les équations du premier bloc. (Celles où $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)$.) On obtient alors

$$\begin{aligned} u^{1,2,3,4} =& \frac{1}{3}\left[\beta^{1,2,3,4,5,6} + \beta^{1,2,3,4,7,8} + \beta^{1,2,3,4,9,10}\right] \\ &- \frac{1}{3}\left[u^{1,2,5,6} + u^{3,4,5,6} + u^{1,2,7,8} + u^{3,4,7,8} + u^{1,2,9,10} + u^{3,4,9,10}\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

On voit que les indices qui apparaissent sur la deuxième ligne sont précisément les indices $J' \in s_k(J)$ tel que $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - 1 = 1$. Or, si on observe le deuxième bloc, on constate que chacun de ces indices apparaît exactement deux fois. Or, deux correspond à $|e(J)| - 1$, qui est donc le facteur qu'on trouve dans le résultat du lemme 2.18 quand $t = 1$. De plus, les indices qui ne vérifient pas $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J') \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - 1 = 1$ apparaissent deux fois, ce qui correspond à $(t+1)$ lorsque $t = 1$. Ainsi, en sommant les équations du deuxième bloc, on obtient

$$\begin{aligned} &\beta^{1,2,5,6,7,8} + \beta^{1,2,5,6,9,10} + \beta^{1,2,7,8,9,10} + \beta^{3,4,5,6,7,8} + \beta^{3,4,5,6,9,10} + \beta^{3,4,7,8,9,10} \\ &= 2\left[u^{1,2,5,6} + u^{3,4,5,6} + u^{1,2,7,8} + u^{3,4,7,8} + u^{1,2,9,10} + u^{3,4,9,10}\right] \\ &\quad + 2\left[u^{5,6,7,8} + u^{5,6,9,10} + u^{7,8,9,10}\right] \end{aligned}$$

ce résultat est donc exactement celui du lemme 2.18 pour $t = 1$. Maintenant si on remplace ceci dans (2.4), on obtient

$$\begin{aligned}u^{1,2,3,4} =& \frac{1}{3}\Big[\beta^{1,2,3,4,5,6} + \beta^{1,2,3,4,7,8} + \beta^{1,2,3,4,9,10} \\ &- \frac{1}{2}\Big(\beta^{1,2,5,6,7,8} + \beta^{1,2,5,6,9,10} + \beta^{1,2,7,8,9,10} + \beta^{3,4,5,6,7,8} + \beta^{3,4,5,6,9,10} + \beta^{3,4,7,8,9,10}\Big) \\ &+ \Big(u^{5,6,7,8} + u^{5,6,9,10} + u^{7,8,9,10}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Cette équation est celle du lemme 2.19 pour $t = 1 = l\,(J) - 1$.

Or, on constate que les inconnues qui nous restent dans le membre de droite sont exactement celles qui apparaissent dans le dernier bloc du système. Ceci est une manifestation de la deuxième partie du lemme 2.18. Ainsi, en remplaçant on obtient

$$\begin{aligned}u^{1,2,3,4} =& \frac{1}{3}\Big[\beta^{1,2,3,4,5,6} + \beta^{1,2,3,4,7,8} + \beta^{1,2,3,4,9,10} \\ &- \frac{1}{2}\Big(\beta^{1,2,5,6,7,8} + \beta^{1,2,5,6,9,10} + \beta^{1,2,7,8,9,10} + \beta^{3,4,5,6,7,8} + \beta^{3,4,5,6,9,10} + \beta^{3,4,7,8,9,10}\Big) \\ &+ \beta^{5,6,7,8,9,10}\Big],\end{aligned}$$

et on a obtenu notre formule pour u^J.

On passe maintenant aux sous-systèmes d'écart plus grand ou égal à 1.

Lemme 2.21 (Les sous-systèmes d'écart plus grand ou égal à 1)**.**
Soit $S = \{S_k, S_{k+2}\}$ un sous-système d'écart plus grand ou égal à 1 et pour $J \in S_k$, soit

$$u^J = \frac{1}{l\,(J) + 1} \sum_{\lambda=0}^{l(J)} (-1)^{\lambda} \begin{pmatrix} l\,(J) \\ \lambda \end{pmatrix}^{-1} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - \lambda}} \beta^I,$$

alors,

$$\beta^I = \sum_{J \in r(I)} u^J$$

pour tout $I \in S_{k+2}$.

Démonstration. On sépare la démonstration en deux étapes.

Étape 1 : Soient $I, I' \in S_{k+2}$ avec $I \neq I'$. Alors,

$$\sigma := \sum_{J \in r(I)} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}{\begin{pmatrix} l\,(J) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s\,(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s\,(I')\right| \end{pmatrix}} = 0.$$

Vu que l'écart du sous -système est plus grand ou égal à 1, on a $1 \left|\tilde{\mathcal{P}}_s\,(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s\,(I)\right| \geqslant 1$. Ainsi, par le lemme 2.15 (ii), on a

$$\sigma = \sum_{J \in r(I)} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}{\begin{pmatrix} l\,(J) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s\,(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s\,(I')\right| \end{pmatrix}}$$

$$= \sum_{\substack{J\in r(I)\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|=\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|-1}} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right|-1}}{\binom{l(I)-1}{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|-1}}$$

$$+ \sum_{\substack{J\in r(I)\\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|=\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right|}}{\binom{l(I)-1}{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}$$

$$= \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right|-1}}{\binom{l(I)-1}{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|-1}}$$

$$+ \left(l(I) - \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|\right) \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right|}}{\binom{l(I)-1}{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}$$

$$= (-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|-1} \frac{l(I)}{\frac{l(I)}{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}\binom{l(I)-1}{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|-1}}$$

$$+ (-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|} \frac{l(I)}{\frac{l(I)}{l(I)-\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}\binom{l(I)-1}{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}$$

Ainsi, par les propriétés des coefficients binomiaux, on a

$$\sigma = (-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|-1} \frac{l(I)}{\binom{l(I)}{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}$$

$$+ (-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|} \frac{l(I)}{\frac{l(I)}{l(I)-\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}\binom{l(I)-1}{l(I)-1-\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}$$

$$= (-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|-1} \frac{l(I)}{\binom{l(I)}{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}$$

$$+ (-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|} \frac{l(I)}{\begin{pmatrix} l(I) \\ l(I) - \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| \end{pmatrix}} = 0,$$

qui est le résultat voulu.

Étape 2 : Nous sommes maintenant en mesure de conclure.

On a pour $J \in S_k$,

$$\begin{aligned}
u^J =& \frac{1}{l(J)+1} \sum_{\lambda=0}^{l(J)} (-1)^\lambda \begin{pmatrix} l(J) \\ \lambda \end{pmatrix}^{-1} \sum_{\substack{I\in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J)-\lambda}} \beta^I \\
=& \frac{1}{l(J)+1} \sum_{\lambda=0}^{l(J)} (-1)^\lambda \begin{pmatrix} l(J) \\ \lambda \end{pmatrix}^{-1} \sum_{I\in S_{k+2}} \beta^I \delta_{l(J)-\lambda}^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|} \\
=& \frac{1}{l(J)+1} \sum_{I\in S_{k+2}} \sum_{\lambda=0}^{l(J)} (-1)^\lambda \begin{pmatrix} l(J) \\ \lambda \end{pmatrix}^{-1} \beta^I \delta_{l(J)-\lambda}^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right|} \\
=& \frac{1}{l(J)+1} \sum_{I\in S_{k+2}} \frac{(-1)^{l(J)-\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right|}}{\begin{pmatrix} l(J) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| \end{pmatrix}} \beta^I \\
=& \frac{(-1)^{l(J)}}{l(J)+1} \sum_{I\in S_{k+2}} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right|}}{\begin{pmatrix} l(J) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| \end{pmatrix}} \beta^I,
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $I \in S_{k+2}$,

$$\sum_{J\in r(I)} u^J = \sum_{J\in r(I)} \frac{(-1)^{l(J)}}{l(J)+1} \sum_{I'\in S_{k+2}} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}{\begin{pmatrix} l(J) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| \end{pmatrix}} \beta^{I'}$$

Or, remarquons que vu que $J \in r(I)$ et que I et I' sont dans le même sous système S, on a que $l(J)+1 = l(I) = l(I')$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{J\in r(I)} u^J =& \frac{(-1)^{l(I)+1}}{l(I)} \sum_{J\in r(I)} \sum_{I'\in S_{k+2}} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}{\begin{pmatrix} l(J) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| \end{pmatrix}} \beta^{I'} \\
=& \frac{(-1)^{l(I)+1}}{l(I)} \sum_{J\in r(I)} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right|}}{\begin{pmatrix} l(J) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| \end{pmatrix}} \beta^I \\
&+ \frac{(-1)^{l(I)+1}}{l(I)} \sum_{I'\in S_{k+2}\setminus\{I\}} \sum_{J\in r(I)} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}{\begin{pmatrix} l(J) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\cap\tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| \end{pmatrix}} \beta^{I'}
\end{aligned}$$

Or, remarquons que si $J \in r(I)$, $\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I)\right| = \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) = l(I) - 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{J \in r(I)} u^J =& \frac{1}{l(I)} \sum_{J \in r(I)} \frac{1}{\begin{pmatrix} l(J) \\ l(J) \end{pmatrix}} \beta^I \\
&+ \frac{(-1)^{l(I)+1}}{l(I)} \sum_{I' \in S_{k+2} \setminus \{I\}} \sum_{J \in r(I)} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}{\begin{pmatrix} l(J) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| \end{pmatrix}} \beta^{I'} \\
=& \frac{|r(I)|}{l(I)} \beta^I \\
&+ \frac{(-1)^{l(I)+1}}{l(I)} \sum_{I' \in S_{k+2} \setminus \{I\}} \sum_{J \in r(I)} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}{\begin{pmatrix} l(J) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| \end{pmatrix}} \beta^{I'} \\
=& \beta^I + \frac{(-1)^{l(I)+1}}{l(I)} \sum_{I' \in S_{k+2} \setminus \{I\}} \sum_{J \in r(I)} \frac{(-1)^{\left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right|}}{\begin{pmatrix} l(J) \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(J) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I')\right| \end{pmatrix}} \beta^{I'},
\end{aligned}$$

car, $|r(I)| = l(I)$.

Ainsi, si $S_{k+2} = \{I\}$, on a le résultat. Sinon, le résultat découle de notre étape 1.

□

Remarque 2.22.
Dans le cas où l'écart du système est 1 cette formule coïncide avec celle donnée par le lemme 2.16. En effet, dans ce cas là, on a par la remarque 2.14 (*iii*) que $|e(J)| = l(J) + 1$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2.4, que nous rappelons ici.

Théorème 2.4 (Régularité du diviseur, cas symplectique)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $\beta \in C^{r,s}\left(\Omega, \Lambda^{k+2}\right)$ tel qu'il existe $v\colon \Omega \to \Lambda^k$ avec $\omega_m \wedge v = \beta$.

Alors, il existe $u \in C^{r,s}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ tel que

$$\omega_m \wedge u = \beta$$

dans Ω.

De plus, le résultat reste vrai si on remplace Ω par $\overline{\Omega}$.

Démonstration. Pour tout $J \in \mathcal{I}_k$, on définit u^J par

$$u^J = \begin{cases} 0 & \text{si } e(J) = \emptyset \\[2ex] \dfrac{1}{|e(J)|} \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{l(J)} (-1)^\lambda \begin{pmatrix} |e(J)| - 1 \\ \lambda \end{pmatrix}^{-1} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - \lambda}} \beta^I & \text{si ecart}\,(s(J)) \leqslant 1 \\[2ex] \dfrac{1}{l(J)+1} \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{l(J)} (-1)^\lambda \begin{pmatrix} l(J) \\ \lambda \end{pmatrix}^{-1} \sum_{\substack{I \in S_{k+2} \\ \left|\tilde{\mathcal{P}}_s(I) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(J)\right| = l(J) - \lambda}} \beta^I & \text{si ecart}\,(s(J)) \geqslant 1. \end{cases}$$

De façon évidente, u ainsi défini appartient à $C^{r,\gamma}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ (respectivement $C^{r,\gamma}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$.) Il faut donc vérifier que u est solution de l'équation $\omega_m \wedge u = \beta$.

Soient $x \in \Omega$ (respectivement $x \in \overline{\Omega}$), et $I \in \mathcal{I}_{k+2}$ quelconques. Il nous faut voir que

$$\sum_{J \in r(I)} u^J(x) = \beta^I(x).$$

Par hypothèse il existe $v_x \in \Lambda^k$ tel que $\omega_m \wedge v_x = \beta(x)$. Or, par le lemme 2.16 si ecart $(s(I)) \leqslant 1$ on a nécessairement que $u^J(x) = v_x^J$ pour tout $J \in s_k(I)$. D'où on a pour $I \in \mathcal{I}_{k+2}$ tel que ecart $(s(I)) \leqslant 1$

$$\sum_{J \in r(I)} u^J(x) = \sum_{J \in r(I)} v_x^J = \beta^I(x).$$

Maintenant, si $I \in \mathcal{I}_{k+2}$ est tel que ecart $(s(I)) \geqslant 1$, alors, par le lemme 2.21, on a

$$\sum_{J \in r(I)} u^J(x) = \beta^I(x).$$

Ainsi, on a bien

$$\omega_m \wedge u = \beta.$$

□

Voyons ce que la formule donnée dans la preuve de ce lemme donne dans les cas décrits par les exemples 2.6 à 2.9.

Exemple 2.23.
Si $k = 0$ et $m \geqslant 2$, tous les systèmes sont d'écart 0. Et la formule donne alors,

$$u = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \beta^{2i-1,2i}.$$

Remarquons néanmoins que l'hypothèse qu'il existe $v \colon \Omega \to \Lambda^0$ tel que $\omega_m \wedge v = \beta$ implique $\beta^{2i-1,2i} = \beta^{2j-1,2j}$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Ainsi,

$$u = \beta^{2i-1,2i}$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, ce qui est la solution qu'on avait trouvé à l'exemple 2.6.

Exemple 2.24.
Pour $k = 1$, commençons par voir ce qu'il se passe lorsque $m \geqslant 2$. Dans ce cas là, tous les systèmes sont d'écart plus petit ou égal à 1. Si $i > 2m$, la formule donne

$$u^i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \beta^{2j-1,2j,i},$$

et si $1 \leqslant i \leqslant 2m$, la formule donne

$$u^i = \frac{1}{m-1} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} \beta^{2j-1,2j,i} + \sum_{j=\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor + 1}^{m} \beta^{i,2j-1,2j} \right)$$

Remarquons que si on suppose que il existe v tel que $\omega_m \wedge v = \beta$ alors, pour tout i et $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant m$ tels que $i \notin \{2j_1 - 1, 2j_1\} \cup \{2j_2 - 1, 2j_2\}$, on a que

$$\beta^{\{i,2j_1-1,2j_1\}} = \beta^{\{i,2j_2-1,2j_2\}}.$$

Ainsi nos formules deviennent

$$u^i = \beta^{2j-1,2j,i}$$

pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$ si $i > 2m$ et
$$u^i = \beta^{\{2j-1,2j,i\}},$$
pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$ tel que $i \notin \{2j-1, 2j\}$. On retrouve donc ce qu'on avait obtenu à l'exemple 2.7.

Si maintenant, on suppose que $m = 1$, et que $1 \leqslant i \leqslant 2m = 2$ alors, $e(\{i\}) = \emptyset$. Donc, la formule pour u^1 et u^2 donne 0, et si $i > 2$, la formule donne
$$u^i = \beta^{12i},$$
qui est ce qu'on avait trouvé à l'exemple 2.7.

Exemple 2.25 ($k = 2$)**.**
Pour $k = 2$, commençons par voir ce qui se passe lorsque $m = 2$. Si $J = \{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ ou $\{2, 4\}$, on a que $e(J) = \emptyset$. Et donc, $u^J = 0$. Pour $J = \{1, 2\}$ ou $\{3, 4\}$, l'écart du sous-système est 2 et on obtient
$$\begin{aligned} u^{12} &= \frac{1}{2}\beta^{1234} \\ u^{34} &= \frac{1}{2}\beta^{1234}. \end{aligned}$$

Si $J = \{i, j\}$ avec $i \in \{1, 2\}$ et $j \geqslant 5$, on a que l'écart du sous-système est 1 et on obtient que $u^J = \beta^{i34j}$. De la même façon, si $i \in \{3, 4\}$ et $j \geqslant 5$, on a que $u^J = \beta^{12ij}$.

Pour finir, si $i, j \geqslant 5$, on a que l'écart du sous-système est nul, et on obtient
$$u^{ij} = \frac{1}{2}\left(\beta^{12ij} + \beta^{34ij}\right).$$
Remarquons néanmoins que si il existe v tel que $\omega_m \wedge v = \beta$, alors, nécessairement, $\beta^{12ij} = \beta^{34ij}$. Ainsi, on a que
$$u^{ij} = \frac{1}{2}\left(\beta^{12ij} + \beta^{34ij}\right) = \beta^{12ij} = \beta^{34ij},$$
qui est ce qu'on avait trouvé à l'exemple 2.8.

Pour $m = 3$, regardons juste la formule pour u^{12} vu que c'est le sous-système de cet indice qui est exposé dans l'exemple 2.8. L'écart du sous-système de $\{1, 2\}$ est 2 et la formule donne
$$u^{12} = \frac{1}{2}\left[\left(\beta^{1234} + \beta^{1256}\right) - \beta^{3456}\right],$$
qui est également le même résultat que trouvé à l'exemple 2.8

Exemple 2.26 ($k = n - 2$)**.**
Dans le cas où $k = n - 2$, dès que n est suffisamment grand, tous les systèmes sont d'écart plus grand ou égal à 1. De plus, la formule donne
$$u^{\{1,\dots,n\}\setminus\{2s-1,2s\}} = \frac{1}{m}\beta^{1,\dots,n}.$$

Les autres coefficients sont nuls.

2.1.2 Injectivité et surjectivité de la multiplication par ω_m

Nous nous intéressons maintenant à la démonstration du théorème 2.5 que nous rappelons ici.

Théorème 2.5.
Soit $\mu \colon \Lambda^k \to \Lambda^{k+2}$ *définie par*
$$\mu(u) = \omega_m \wedge u.$$

Alors,

(i) μ *est injective si et seulement si* $m \geqslant k+1$ *;*

(ii) μ *est surjective si et seulement si* $m \geqslant n-k-1$.

Démonstration. La preuve se sépare naturellement en quatre étapes. Les deux premières étapes établissent l'équivalence dans le premier point et les étapes 3 et 4 s'intéressent à l'équivalence dans le deuxième point.

Étape 1 : On montre que si $m \geqslant k+1$, μ est injective.

Pour montrer ceci, on montre que n'importe quel sous-système (au sens de la définition 2.10) de l'équation

$$\omega_m \wedge u = \beta$$

est d'écart plus petit ou égal à 1. En effet, le lemme 2.16 nous permet alors de conclure que les solutions de cette équation sont uniques et donc, μ est injective. Soit donc $S = \{S_k, S_{k+2}\}$ un sous-système quelconque. Comme dans l'étape 1 de la preuve du lemme 2.13, on définit une injection $\iota\colon \mathcal{P}_a(S) \cap \{1,..,2m\} \to \{1,...,m\}$ par

$$\iota(i) = \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor.$$

Alors, du fait que

$$s = \left\lfloor \frac{(2s-1)+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2s)+1}{2} \right\rfloor$$

on a

$$\iota(\mathcal{P}_a(S) \cap \{1,...,2m\}) = \{1 \leqslant s \leqslant m \ : \ \{2s-1, 2s\} \cap \mathcal{P}_a(S) \neq \emptyset\}$$

D'où on déduit

$$\{1,...,m\} \backslash \iota(\mathcal{P}_a(S) \cap \{1,...,2m\}) = \{1 \leqslant s \leqslant m \ : \ \{2s-1, 2s\} \subset \{1,...,2m\} \backslash \mathcal{P}_a(S)\}.$$

Et donc,

$$\begin{aligned} |\{1 \leqslant s \leqslant m \ : \ \{2s-1, 2s\} \subset \{1,...,2m\} \backslash \mathcal{P}_a(S)\}| &= m - |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1,...,2m\}| \\ &\geqslant \underbrace{m}_{\geqslant k+1} - \underbrace{|\mathcal{P}_a(S)|}_{=k+2-2l_{k+2}(S)} \\ &\geqslant 2l_{k+2}(S) - 1. \end{aligned}$$

Soit donc $\{s_j\}_{1 \leqslant j \leqslant 2l_{k+2}(S)-1}$, des éléments distincts de

$$\{1 \leqslant s \leqslant m \ : \ \{2s-1, 2s\} \subset \{1,...,2m\} \backslash \mathcal{P}_a(S)\},$$

et considérons

$$\begin{aligned} I_1 &:= \left[\bigcup_{j=1}^{l_{k+2}(S)} \{2s_j - 1, 2s_j\} \right] \bigcup \mathcal{P}_a(S) \\ I_2 &:= \left[\bigcup_{j=l_{k+2}(S)}^{2l_{k+2}(S)-1} \{2s_j - 1, 2s_j\} \right] \bigcup \mathcal{P}_a(S). \end{aligned}$$

Alors, $I_1, I_2 \in S_{k+2}$ et

$$\left| \tilde{\mathcal{P}}_s(I_1) \cap \tilde{\mathcal{P}}_s(I_2) \right| = \left| \left\{ s_{l_{k+2}(S)} \right\} \right| = 1,$$

ce qui montre que le sous-système est d'écart plus petit ou égal à 1 et termine cette étape de la démonstration.

Étape 2 : On montre que si μ est injective, alors $k+1 \leqslant m$.

On montre ceci par contraposée, c'est-à-dire, on suppose que $m \leqslant k$ et on exhibe $u \in \Lambda^k$ tel que $u \neq 0$ et $\mu(u) = 0$. On distingue deux cas. Premièrement, si $k \leqslant 2m$, on pose

$$u = \left(\bigwedge_{s=1}^{m} dx^{2s}\right) \wedge \left(\bigwedge_{s=1}^{k-m} dx^{2s-1}\right) \in \Lambda^k.$$

Remarquons que $2(k-m)-1 = k+(k-2m)-1 \leqslant k-1$, d'où, aucun des indices $2s$ ou $2s-1$ ne dépasse n et donc on a bien que u est un élément non nul de Λ^k. De plus, on a alors pour tout $1 \leqslant \sigma \leqslant m$,

$$dx^{2\sigma-1} \wedge dx^{2\sigma} \wedge \left(\bigwedge_{s=1}^{m} dx^{2s}\right) = 0,$$

d'où, $\mu(u) = 0$. Si maintenant on suppose $k \geqslant 2m$, alors, on pose

$$u = \bigwedge_{i=1}^{k} dx^i.$$

Alors, vu que $k \geqslant 2m$, on a pour tout $1 \leqslant \sigma \leqslant m$,

$$dx^{2\sigma-1} \wedge dx^{2\sigma} \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{k} dx^{i}\right) = 0,$$

d'où $\mu(u) = 0$, malgré le fait que $u \neq 0$.

Étape 3 : On montre que si $m \geqslant n-k-1$, alors μ est surjective.

On doit montrer deux choses. Premièrement, on montre que pour tout indice $I \in \mathcal{I}_{k+2}$, la réduction de I (c'est-à-dire $r(I)$ au sens de la définition 2.10) est non-vide, puis, on montre que tous les sous-systèmes sont d'écart plus grand ou égal à 1. Le lemme 2.21 nous permettra alors de conclure que tous les sous-systèmes de

$$\omega_m \wedge u = \beta$$

ont une solution et donc que μ est surjective. Dans les deux choses qu'on va montrer, on procédera par l'absurde. Commençons par le preuve que pour tout $I \in \mathcal{I}_{k+2}$, $r(I) \neq \emptyset$. On suppose par l'absurde que $I \in \mathcal{I}_{k+2}$ est tel que $r(I) = \emptyset$. On a alors, pour tout $1 \leqslant s \leqslant m$,

$$|\{2s-1, 2s\}| \leqslant 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} k+2 = |I| = &|I \cap \{2m+1, ..., n\}| + |I \cap \{1, ..., 2m\}| \leqslant n - 2m + \left|\bigcup_{s=1}^{m} \{2s-, 2s\} \cap I\right| \\ \leqslant &n - 2m + m = n - m, \end{aligned}$$

ce qui entre en contradiction avec notre hypothèse.

Montrons maintenant que n'importe quel sous-système est d'écart plus grand ou égal à 1. Soit $S = \{S_k, S_{k+2}\}$ un sous système quelconque, et supposons par l'absurde que $\operatorname{ecart}(S) = 0$. Alors, par le lemme 2.13,

$$2l_{k+2}(S) + |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}| \leqslant m.$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} k+2 = &2l_{k+2}(S) + |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}| + \underbrace{|\{2m+1, ..., n\} \cap \mathcal{P}_a(S)|}_{\leqslant n-2m} \\ \leqslant &2l_{k+2}(S) + |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}| + n - 2m \\ \leqslant &2l_{k+2}(S) + |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}| + n - m - (n-k-1), \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$2l_{k+2}(S) + |\mathcal{P}_a(S) \cap \{1, ..., 2m\}| \geqslant m + 1,$$

et on a obtenu une contradiction. Ceci termine la démonstration de cette étape.

Étape 4 : On montre que si μ est surjective, alors $m \geqslant n - k - 1$.

On procède par contraposée, c'est-à-dire, on suppose que $m \leqslant n - k - 2$, et on exhibe $\beta \in \Lambda^{k+2}$ qui n'est pas dans l'image de μ. On distingue deux cas. Si $k + 2 \geqslant m$, on définit

$$\beta = \left(\bigwedge_{i=1}^{m} dx^{2i} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=2m+1}^{k+m+2} dx^{i} \right).$$

Remarquons que $k + m + 2 \leqslant k + 2 + n - k - 2 = n$, et donc $\beta \in \Lambda^{k+2} \backslash \{0\}$. Une condition nécessaire évidente pour le fait qu'il existe une solution de $\omega_m \wedge u = \beta$ est que pour tout $I \in \mathcal{I}_{k+2}$, $r(I) = \emptyset$ implique $\beta^I = 0$. Or ici, $I = \{2, 4, ..., 2m, 2m + 1, 2m + 2, ..., k + m + 2\}$ est tel que $r(I) = \emptyset$ vu que pour tout $1 \leqslant s \leqslant m$, $\{2s - 1, 2s\} \cap I = \{2s\}$. De plus $\beta^I = 1$ et il n'existe donc pas d'élément $u \in \Lambda^k$ tel que $\mu(u) = \beta$. Si maintenant $k + 2 \leqslant m$, on définit

$$\beta = \bigwedge_{i=1}^{k+2} dx^{2i}.$$

Remarquons que $2k + 4 \leqslant 2m \leqslant n$ et donc $\beta \in \Lambda^{k+2} \backslash \{0\}$. Par les mêmes arguments que ci-dessus, on a qu'il n'existe pas d'élément $u \in \Lambda^k$ tel que $\omega_m \wedge u = \beta$. Ceci termine la démonstration du théorème. □

2.2 Le cas général

Comme mentionné au début du chapitre, l'idée pour montrer les théorèmes 2.1 et 2.2 est de se ramener au cas où $\alpha = \omega_m$ en utilisant le théorème de Darboux. Mais pour faire ceci, on a besoin que le rappel par un difféomorphisme respecte notre équation. Nous aurons donc besoin de la remarque suivante.

Remarque 2.27.
Une question qu'on va se poser dans la démonstration du théorème qui établit la régularité des solutions de $\alpha \wedge u = \beta$, est la suivante. Étant donné un difféomorphisme $\varphi \colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ et sachant qu'il existe $v \colon \Omega \to \Lambda^k$ tel que $\alpha \wedge v = \beta$, existe-t-il $\tilde{v} \colon \tilde{\Omega} \to \Lambda^k$ tel que

$$\varphi^*(\alpha) \wedge \tilde{v} = \varphi^*(\beta) \ ?$$

Si la réponse paraît être évidente, c'est parce qu'un résultat standard (voir proposition A.5) nous donne le résultat avec $\tilde{v} = \varphi^*(v)$ dès que v est continue. Or, dans notre cas, v n'est a priori pas continue.

Néanmoins on a quand même l'existence de $\tilde{v}$ en utilisant l'identité suivante. Pour $f \in C^0\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ et $x_0 \in \tilde{\Omega}$

$$\varphi^*(f)(x_0) = \varphi^*\left(f\left(\varphi^{-1}(x_0)\right)\right)(x_0),$$

où on voit $f\left(\varphi^{-1}(x_0)\right)$ comme une forme différentielle constante. Ainsi, si on définit $\tilde{v} \colon \tilde{\Omega} \to \Lambda^k$ par

$$\tilde{v}(x) = \varphi^*\left(v\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)(x),$$

on a

$$\varphi^*(\alpha)(x) \wedge \tilde{v}(x) = \varphi^*\left(\alpha\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)(x) \wedge \varphi^*\left(v\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)(x)$$

$$\begin{aligned} &= \varphi^* \left(\alpha \left(\varphi^{-1}(x) \right) \wedge v \left(\varphi^{-1}(x) \right) \right)(x) \\ &= \varphi^* \left(\beta \left(\varphi^{-1}(x) \right) \right)(x) = \varphi^*(\beta)(x), \end{aligned}$$

et ainsi, $\tilde{v}$ a bien les propriétés voulues.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 2.1, que nous rappelons ici.

Théorème 2.1 (Régularité du diviseur)**.**
Soit $r \geqslant 1$, $2 \leqslant 2m \leqslant n$ *des entiers,* $\alpha \in C^r(\Omega, \Lambda^2)$ *et* $\beta \in C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^{k+2}\right)$ *tels que*

(i) $d\alpha = 0$ *sur* Ω *;*

(ii) $\operatorname{rang}[\alpha] = 2m$ *sur* Ω *;*

(iii) pour tout $x \in \Omega$*, il existe* $v \in \Lambda^k$ *tel que*

$$\alpha(x) \wedge v = \beta(x).$$

Alors, il existe $u \in C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ *tel que*

$$\alpha \wedge u = \beta.$$

Démonstration du théorème 2.1. Soit $x \in \Omega$. Par le Théorème de Darboux, (voir Théorème A.8, page 143), il existe U_x un voisinage de x et $\varphi_x \in \operatorname{Diff}^r(U_x, \varphi_x(U_x))$ tel que $\varphi_x(x) = x$ et

$$\varphi_x^*(\alpha) = \omega_m = \sum_{i=1}^{m} dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}.$$

sur U_x. De plus, par la remarque 2.27, on a qu'il existe $v \colon U_x \to \Lambda^k$ tel que $\omega_m \wedge v = \varphi_x^*(\beta) \in C^{r-1}\left(U_x, \Lambda^{k+2}\right)$. Ainsi, par le théorème 2.4, page 12, il existe $u_x \in C^{r-1}\left(U_x, \Lambda^k\right)$ tel que

$$\omega_m \wedge u_x = \varphi_x^*(\beta).$$

En appliquant $\left(\varphi_x^{-1}\right)^*$, on obtient

$$\alpha \wedge \left(\varphi_x^{-1}\right)^*(u_x) = \beta$$

sur $\varphi_x(U_x)$.

Considérons maintenant $\{\psi_i\}_{i \geqslant 1}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\{\varphi_x(U_x)\}_{x \in \Omega}$. C'est à dire,

(i) pour tout $i \geqslant 1$, $\psi_i \in C_c^\infty(\Omega)$;

(ii) pour tout $i \geqslant 1$, il existe $x \in \Omega$ tel que $\operatorname{supp}(\psi_i) \subset \varphi_x(U_x)$;

(iii) pour tout $i \geqslant 1$, $0 \leqslant \psi_i \leqslant 1$;

(iv) $\sum_{i=1}^\infty \psi_i \equiv 1$ sur Ω ;

(v) pour tout $y \in \Omega$, il existe $\delta > 0$ et un nombre fini d'indice $i_1, ..., i_t$ tel que

$$\sum_{i \geqslant 1} \psi_i = \sum_{j=1}^{t} \psi_{i_j}$$

sur $B_\delta(y)$.

Soit encore, pour tout $i \geqslant 1$, $x_i \in \Omega$ tel que $\operatorname{supp}(\psi_i) \subset \varphi_{x_i}(U_{x_i})$. Définissons enfin

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \cdot \left(\varphi_{x_i}^{-1}\right)^*(u_{x_i}).$$

Vu que la somme est localement finie, on a que $u \in C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$. De plus,

$$\alpha \wedge u = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \cdot \alpha \wedge \left(\varphi_{x_i}^{-1}\right)^*(u_{x_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \beta = \beta,$$

ce qui est le résultat voulu. $\square$

Exemple 2.28 (Optimalité de la condition de rang constant)**.**
Voyons ici un exemple qui montre que la condition de rang constant est nécessaire pour l'existence d'un diviseur régulier.

Soit $\alpha = x_1^2 dx^1 \wedge dx^2 + \sum_{i=2}^{k+1} dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}$. Alors, $d\alpha = 0$ et

$$\mathrm{rang}[\alpha\,(x)] = \begin{cases} 2(k+1) & \text{si } x_1 \neq 0 \\ 2k & \text{si } x_1 = 0. \end{cases}$$

Soit aussi

$$\beta = x_1 dx^1 \wedge dx^2 \bigwedge_{i=2}^{k+1} dx^{2i}.$$

Alors, $\alpha, \beta \in C^\infty$, mais les k-formes γ telles que $\alpha \wedge \gamma = \beta$ sont données par $\gamma = \tilde{\gamma} \bigwedge_{i=2}^{k+1} dx^{2i}$, où

$$\tilde{\gamma}\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_1} & \text{si } x_1 \neq 0 \\ \tilde{\gamma}\,(x) & \text{est quelconque, si } x_1 = 0. \end{cases}$$

Ainsi, quel que soit le choix de $\tilde{\gamma}$, γ n'est pas continue.

Chapitre 3

Existence de solutions

Maintenant que nous avons étudié l'équation algébrique, nous disposons des outils principaux dont nous aurons besoin pour montrer le théorème d'existence principal.

3.1 Démonstration et optimalité du théorème principal

On commence par rappeler l'énoncé.

Théorème 3.1.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $r \geqslant 1$ *des entiers,* $a \in C^1\left(\Omega, \Lambda^1\right)$ *et* $f \in C^1\left(\Omega, \Lambda^{k+1}\right)$. *Alors,*

(i) *toute solution* $w \in C^1$ *de*

$$dw + a \wedge w = f \tag{3.1}$$

est solution de

$$da \wedge w = df + a \wedge f; \tag{3.2}$$

(ii) *si* $\operatorname{rang}[da] \geqslant 2(k+1)$, *alors* (3.1) *et* (3.2) *ont au plus une solution ;*

(iii) *si* $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \geqslant 2(k+2)$, $a \in C^{r+2}$ *et* $f \in C^{r+1}$, *alors* (3.1) *et* (3.2) *sont équivalentes et admettent au plus une solution* $w \in C^r$ *;*

(iv) *si* $k \geqslant 1$ *et* $u \in C^1\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$ *est tel que* $du \in C^1$ *et*

$$da \wedge u = f, \tag{3.3}$$

alors, $w = du + a \wedge u$ *est une solution de* (3.1) *;*

(v) *si* $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \geqslant 2(n-k)$, $a \in C^{r+3}$ *et* $f \in C^{r+1}$, (3.1) *admet toujours une solution* $w \in C^r$.

Démonstration. Commençons par la preuve de (i). Soit donc $w \in C^1$ tel que

$$dw + a \wedge w = f.$$

Remarquons que $dw = f - a \wedge w \in C^1$. Ainsi, ddw a un sens dans C^0 et on a que $ddw = 0$. En effet, pour tout $\varphi \in C_c^\infty\left(\Omega, \Lambda^{k+2}\right)$, on a

$$\int_\Omega \langle ddw; \varphi\rangle = \int_\Omega \langle w, \delta\delta\varphi\rangle = 0.$$

Ainsi, appliquant l'opérateur d à (3.1), on obtient

$$da \wedge w - a \wedge dw = df.$$

Remplaçant dw par $f - a \wedge w$, on déduit

$$da \wedge w - a \wedge f = df,$$

qui est l'équation (3.2) qu'on voulait établir.

Le point (ii) est une application du point (i) et du théorème 2.2, page 11.

Pour le point (iii), on doit montrer que si (3.2) admet une solution, celle-ci est une solution de (3.1). Premièrement, on a par le théorème 2.1, page 11 que l'unique solution de

$$da \wedge w = df + a \wedge f$$

est C^r. Appliquant l'opérateur d à cette dernière équation, on obtient

$$da \wedge dw = da \wedge f - a \wedge df.$$

Utilisant le fait que $df = da \wedge w - a \wedge f$, on déduit que

$$da \wedge (dw + a \wedge w - f) = 0.$$

La proposition 2.2, page 11 nous permet alors de conclure.

La démonstration du point (iv) est une vérification directe, et la démonstration du point (v) consiste en une application successive du théorème 2.2, page 11 à l'équation $da \wedge u = f$, du théorème 2.1, page 11 qui nous donne un $u \in C^{r+1}$ et du point (iv).

$\square$

Voyons maintenant quelques exemples qui montrent l'optimalité des hypothèses du théorème 3.1

Exemple 3.2 (Optimalité de la condition rang $[da] \geqslant 2(k+2)$ pour l'équivalence des équations (3.1) et (3.2))**.**
Soit $a = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} dx^{2i}$ et $f = \bigwedge_{i=1}^{k+1} dx^{2i}$. Alors, l'unique solution de $da \wedge w = df + a \wedge f$ est $w = 0$ car $df + a \wedge f = 0$. Or, $w = 0$ n'est clairement pas une solution de $dw + a \wedge w = f$.

Exemple 3.3 (Optimalité de la régularité donnée par les points (iii) et (v))**.**
Soit $k = 1$, $r \geqslant 1$, des entiers, $n = 3$ $a = x_1 dx^2$ et $f = (x_3)^{r+1} |x_3| \, dx^1 \wedge dx^2$. Alors, on a $f \in C^{r+1}(\Omega, \Lambda^2)$ et $a \in C^\infty(\Omega, \Lambda^1)$, où Ω est un voisinage de 0.

Premièrement, on a $w = x_1 (x_3)^{r+1} |x_3| dx^2 + (r+1)(x_3)^r |x_3| dx^3$ est une solution de $dw + a \wedge w = f$. Ainsi, on est dans le cas où notre équation a une solution.

De plus, toute solution de $dw + a \wedge w$ est une solution de $da \wedge w = df + a \wedge f$, qui est ici

$$w^3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = (r+1)(x_3)^r |x_3| dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Ainsi, nécessairement, toutes les solutions de $dw + a \wedge w = f$ ont une composante qui est $(r+1)(x_3)^r |x_3|$ qui est C^r mais pas C^{r+1}.

Exemple 3.4 (Optimalité de la condition rang $[da] \geqslant 2(k+1)$ pour l'unicité des solutions)**.**
Soient $1 \leqslant m \leqslant k$, $a = \sum_{i=1}^{m} x_{2i-1} dx^{2i}$ et $w = \tilde{w}(x_2, x_4, ..., x_{2k}) \bigwedge_{i=1}^{k} dx^{2i}$, avec $\tilde{w} \neq 0$. Alors, on a rang$[da] = 2m \leqslant 2k$,

$$dw = 0$$

et vu que $m \leqslant k$, on a

$$a \wedge w = 0.$$

On conclut donc que $dw + a \wedge w = 0$, malgré le fait que $w \neq 0$.

3.2 Le cas où a est exacte

Comme mentionné dans l'introduction, lorsque a est exacte, on peut se ramener aisément au lemme de Poincaré. Voici le résultat qu'on obtient.

Théorème 3.5 (Existence, cas où a est exacte)**.**
Soient $r \geqslant 1$, $0 < h < 1$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, régulier, $f \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^{k+1}\right)$ et $a \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^1\right)$ exacte. Alors il existe $w \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$ tel que $dw + a \wedge w = f$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

(i)
$$df + a \wedge f = 0$$
sur Ω.

(ii)
$$\int_\Omega \langle f; \psi \rangle = 0$$
pour tout $\psi \in C^1\left(\overline{\Omega}, \Lambda^{k+1}\right)$ avec $d\psi - a \wedge \psi = 0$, $\delta\psi - a \lrcorner \psi = 0$ dans Ω et $\nu \lrcorner \psi = 0$ sur $\partial\Omega$.

Démonstration. Commençons par l'aspect nécessaire

La condition (i) découle du fait que $da = 0$ vu que a est exacte. Montrons donc que (ii) est vérifiée. Soit donc ψ comme ci-dessus. Alors, on a par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle f, \psi \rangle &= \int_\Omega \langle dw + a \wedge w, \psi \rangle \\
&= \int_\Omega \langle dw, \psi \rangle + \int_\Omega \langle a \wedge w, \psi \rangle \\
&= \underbrace{\int_{\partial\Omega} \langle w, \nu \lrcorner \psi \rangle}_{=0} - \int_\Omega \langle w, \delta\psi \rangle + \int_\Omega \langle w, a \lrcorner \psi \rangle \\
&= -\int_\Omega \langle w, \delta\psi - a \lrcorner \psi \rangle = 0,
\end{aligned}$$

ce qui finit la preuve de l'aspect nécessaire.

Passons maintenant à l'aspect suffisant.

Soit $A \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^0\right)$ tel que $dA = a$, et montrons que $e^A f$ est exacte sur Ω.

On veut appliquer le lemme de Poincaré (voir théorème A.9) et donc, on doit montrer que $d[e^A f] = 0$ et pour tout $\chi \in \mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^{k+1}\right)$, on a

$$\int_\Omega \left\langle e^A f, \chi \right\rangle = 0.$$

Or,
$$d[e^A f] = e^A\left(df + a \wedge f\right) = 0.$$

De plus, pour $\chi \in \mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^{k+1}\right)$ on a

$$\begin{aligned}
d[e^A\chi] - a \wedge e^A\chi &= a \wedge e^A\chi + e^A d\chi + a \wedge e^A\chi = 0 \\
\delta[e^A\chi] - a \lrcorner e^A\chi &= a \lrcorner e^A\chi + e^A\delta\chi - a \lrcorner e^A\chi = 0 \\
\nu \lrcorner e^A\chi &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, par (ii), on a
$$\int_\Omega \left\langle e^A f, \chi \right\rangle = \int_\Omega \left\langle f, e^A\chi \right\rangle = 0.$$

Ainsi, on a qu'il existe $g \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$ tel que $dg = e^A f$. Posant donc $w = e^{-A} g \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$, on a

$$dw + a \wedge w = f.$$

$\square$

Remarque 3.6. (i) On voit dans la preuve qu'en réalité, le résultat peut se formuler comme suit. Il existe w tel que $dw + a \wedge w = f$ si et seulement si, $e^A f$ est exacte, où A est un potentiel de a. Néanmoins, l'avantage de notre formulation ci-dessus est qu'elle ne fait pas apparaître le potentiel de A explicitement. On peut donc voir ce théorème comme un point de départ pour l'étude de notre équation dans le cas où a est fermée, non-exacte.

(ii) En changeant de point de vue, on voit que ce résultat est aussi un résultat sur l'opérateur noyau. En effet, on s'intéressera dans le chapitre 4 à l'existence d'opérateurs $N^k \colon C^2\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right) \to C^1\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ tel que

$$L_a^k \circ N^k \equiv 0$$

et pour tout w tel que $dw + a \wedge w = 0$, il existe φ tel que $N^k(\varphi) = w$. Dans le cas où Ω est contractile la condition (ii) est vide car $\mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^k\right) = \{0\}$. Et donc, en identifiant f avec w tel que $dw + a \wedge w = 0$ et w avec φ, on a que $N^k = L_a^{k-1}$ vérifie les propriétés ci-dessus.

3.3 Le cas aux limites

Dans cette section on s'intéresse à des problèmes du type trouver $w \in C^r\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$ tel que

$$\begin{cases} dw + a \wedge w = f & \text{dans } \Omega \\ w = w_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Pour le moment, il est difficile d'utiliser une analyse à l'aide de la divisibilité dans ce cas là, car on n'a pas encore de construction d'un diviseur régulier sur un fermé, ce qui est dû à l'utilisation d'une partition de l'unité.

Remarquons de plus que si on était capable de résoudre le problème algébrique suivant

$$\begin{cases} da \wedge w = df + a \wedge f & \text{dans } \Omega \\ w = w_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

on serait en mesure de résoudre (3.4) sous une hypothèse de rang constant et plus grand ou égal à $2(k+2)$ sur da. Or, dans le cas où da est la forme symplectique standard $\omega_m = \sum_{i=1}^m dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}$ avec $m \geqslant k+2$, on sait résoudre le problème (3.5), comme on le verra plus bas.

De plus, une solution de (3.4) est toujours une solution de (3.5), et une condition nécessaire évidente pour l'existence d'une solution de cette dernière équation est que $da \wedge w_0 = df + a \wedge f$ sur $\partial\Omega$.

Théorème 3.7.
Soit $a = \sum_{i=1}^m x_{2i-1} dx^{2i}$ *avec* $m \geqslant k+2$, $r \geqslant 1$, $f \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^{k+1}\right)$ *et* $w_0 \colon \partial\Omega \to \Lambda^k$. *Alors, il existe* $w \in C^r\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$ *tel que*

$$\begin{cases} dw + a \wedge w = f & \textit{dans } \Omega \\ w = w_0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

si et seulement si

(i) *il existe* $v \colon \Omega \to \Lambda^k$ *tel que* $da \wedge v = df + a \wedge f$ *;*

(ii) $da \wedge w_0 = df + a \wedge f$ *sur* $\partial\Omega$.

Démonstration. Pour l'aspect nécessaire, il suffit de prendre $v = w$ et constater que par continuité, on a que

$$da \wedge w = df + a \wedge f$$

jusqu'au bord.

Montrons l'aspect suffisant.

Soit $\overline{v} \colon \overline{\Omega} \to \Lambda^k$ défini par $\overline{v} = v$ sur Ω et $v = w_0$ sur $\partial\Omega$. Alors, $da \wedge \overline{v} = df + a \wedge f$ sur $\overline{\Omega}$, d'où, par le théorème 2.4, page 12, il existe $w \in C^r\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$ tel que

$$da \wedge w = df + a \wedge f$$

sur $\overline{\Omega}$. Remarquons maintenant que $da \wedge (w - w_0) = 0$ sur $\partial\Omega$. Ainsi, vu que $m \geqslant (k+2) \geqslant (k+1)$, on a par le théorème 2.5, page 12 que $w = w_0$ sur $\partial\Omega$. De plus, vu que $r \geqslant 1$, on a

$$da \wedge (dw + a \wedge w) = da \wedge f.$$

À nouveau, vu que $m \geqslant k + 2$, ceci implique

$$dw + a \wedge w = f$$

sur Ω qui est le résultat souhaité.

$\square$

Chapitre 4

Le noyau de l'opérateur

On s'intéresse ici au noyau de l'opérateur $L_a^k(w) = dw + a \wedge w$. C'est-à-dire qu'on s'intéresse à deux objets. Premièrement, on s'intéresse à l'espace

$$\mathrm{Ker} L_a^k = \left\{ w \in C^1\left(\Omega, \Lambda^k\right) \ : \ dw + a \wedge w = 0 \right\}$$

et à des opérateurs différentiels

$$N^k \colon C^1\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right) \to \mathrm{Ker} L_a^k$$

qu'on appelle alors *opérateur noyau.*

On essaie généralement de caractériser l'espace $\mathrm{Ker} L_a^k$ comme l'image d'un opérateur N^k comme ci-dessus lorsque cela est possible.

Remarquons que par le théorème 3.1 (*ii*), si $\mathrm{rang}[da] \equiv 2m \geqslant 2(k+1)$, $\mathrm{Ker} L_a = \{0\}$. On doit donc s'intéresser au cas où $m \leqslant k$. Néanmoins, pour la construction des opérateurs noyau d'ordre 1 comme on va le faire ci-dessous, on aura besoin que $m \leqslant k-1$. En effet, on aura aussi besoin du fait que $\mathrm{Anh}_{k-1}(da) = \left\{ u \in \Lambda^{k-1} \ : \ da \wedge u = 0 \right\} \neq \{0\}$, ce qui est le cas quand $m \leqslant k-1$, par le théorème 2.5. On traitera quelques exemples dans le cas où $k = m$ dans la section 4.2.

Le résultat principal de ce chapitre est un résultat de la section 4.1 qui est le suivant.

Théorème 4.1 (L'opérateur noyau)**.**
Soit $a \in C^1(\Omega, \Lambda^1)$, $1 \leqslant m \leqslant k-1$ et $\mathrm{Anh}_{k-1}(da) = \left\{ u \in \Lambda^{k-1} \ : \ da \wedge u = 0 \right\}$. Alors,

(i) l'opérateur

$$L_a^{k-1} \colon C^2(\Omega, \mathrm{Anh}_{k-1}(da)) \to C^1\left(\Omega, \Lambda^k\right) : \eta \mapsto d\eta + a \wedge \eta$$

vérifie $L_a^k L_a^{k-1}(\eta) = 0$ pour tout $\eta \in C^2(\Omega, \mathrm{Anh}_{k-1}(da))$;

(ii) si $\mathrm{rang}[da] \equiv 2m$, et $a \in C^{r+2}$, la projection orthogonale $\pi_{k-1} \colon \Lambda^{k-1} \to \mathrm{Anh}_{k-1}(da)$ respecte la régularité. C'est-à-dire, pour tout $\xi \in C^r\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$, $\pi_{k-1}(\xi) : \Omega \to \mathrm{Anh}_{k-1}(da)$ définie par

$$\pi_{k-1}(\xi)(x) = \pi_{k-1}(\xi(x))$$

vérifie $\pi_{k-1}(\xi) \in C^r(\Omega, \mathrm{Anh}_{k-1}(da))$ et donc $N^k := L_a^{k-1} \circ \pi_{k-1}$ est un opérateur noyau ;

(iii) si $r \geqslant 4$, $a \in C^{r+1}(\Omega, \Lambda^1)$, $\mathrm{rang}[da] \equiv 2m$ avec $m \geqslant n-k+1$ et que $w \in C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ est tel que $L_a^k(w) = dw + a \wedge w = 0$, il existe $\eta \in C^{r-2}\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$ tel que

$$d\eta + a \wedge \eta = w.$$

En particulier, pour tout η comme ci-dessus, $da \wedge \eta = 0$ et donc quelque soit $\xi \in C^{r-2}\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$ tel que $\pi_{k-1}(\xi) = \eta$,

$$N^k(\xi) = w.$$

Remarque 4.2.
Ce théorème nous donne de l'information dès que k est grand comme on va le voir. Si $k = 0, 1$, le théorème ne nous donne aucune information. En effet, dans les deux cas la condition $1 \leqslant m \leqslant k-1$ n'est jamais vérifiable. Dans le cas où $k = n-1$ par contre, ce théorème nous donne beaucoup d'information. En effet, la condition $1 \leqslant m \leqslant k-1$ est toujours vérifiée dès que $n \geqslant 4$ et $da \neq 0$. De plus, la condition qui nous donne la surjectivité, c'est-à-dire $\operatorname{rang}[da] \geqslant 4$ n'est pas vérifiée uniquement si $\operatorname{rang}[da] \equiv 2$. Dans tous les autres cas, on a donc la surjectivité de l'opérateur noyau. On verra dans la sous-section 4.1.1 que dans le cas où $\operatorname{rang}[da] \equiv 2$, on aura la surjectivité locale de notre opérateur noyau. On aura donc que notre opérateur vérifie les propriétés de surjectivité à l'intérieur du domaine qui sont établies dans [6], pour un opérateur noyau d'ordre 2.

L'idée de la construction des opérateurs N^k est la suivante. Vu que $L_a^k L_a^{k-1}(\varphi) = da \wedge w$, si $\varphi \in \operatorname{Anh}_{k-1}(da) = \{u \in \Lambda^{k-1} \ : \ da \wedge u = 0\}$, on a que $L_a^k L_a^{k-1}(\varphi) = 0$. De plus, vu que $\operatorname{Anh}_{k-1}(da)$ est un sous espace vectoriel, il existe une projection orthogonale $\pi_{k-1} \colon \Lambda^{k-1} \to \operatorname{Anh}_{k-1}(da)$. Donc, en prenant $N^k = L_a^{k-1} \circ \pi_{k-1}$, on obtient un opérateur noyau.

Ceci est consistant avec l'observation suivante. Si on veut se servir de l'opérateur L_a^{k-1} pour construire un opérateur noyau surjectif, on ne perd pas de généralité en passant par l'anihilateur de da. En effet, si $w \in \operatorname{Ker} L_a^k$ et que ψ est tel que $L_a^{k-1}(\psi) = w$, alors, nécessairement, on a

$$da \wedge \psi = L_a^k \circ L_a^{k-1}(\psi) = L_a^k(w) = 0,$$

c'est à dire que ψ est dans l'anihilateur de da.

On conjecture de plus que l'opérateur que nous allons construire a un aspect canonique parmi les opérateurs noyau d'ordre 1. Par là, on entend que si N est l'opérateur noyau d'ordre 1 que nous allons construire et que $\tilde{N}$ est n'importe quel autre opérateur noyau d'ordre 1, alors si $\tilde{N}$ est surjectif, N l'est aussi. Plus précisément, il existe une transformation linéaire $M \colon \Lambda^{k-1} \to \Lambda^{k-1}$ telle que $\tilde{N} = N \circ M$. On n'a pas encore de preuve de ce fait, mais l'exemple 5.12 où $n = 3$, $k = 2$ et $a = x_1 dx^2$ nous mène à penser que ceci est vrai.

4.1 Le cas où rang$[da] \equiv 2m \leqslant 2(k-1)$

Comme mentionné ci-dessus, pour construire un opérateur noyau, on va composer l'opérateur L_a^{k-1} avec la projection orthogonale sur $\operatorname{Anh}_{k-1}(da)$. Or, la projection orthogonale est une opération algébrique qu'on applique à chaque point, c'est-à-dire, si pour $x \in \Omega$, on définit $\pi_x \colon \Lambda^{k-1} \to \operatorname{Anh}_{k-1}(da(x))$, la projection orthogonale, alors, on définit $\pi \colon C^r\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right) \to C^r(\Omega, \operatorname{Anh}_{k-1}(da))$ par

$$\pi(u)(x) = \pi_x(u(x)).$$

Comme dans le cas de notre équation algébrique, $\alpha \wedge u = \beta$, on se pose alors la question est-ce qu'on a bien $\pi(u) \in C^r$? On a besoin de cette régularité car on veut ensuite applique l'opérateur L_a^{k-1} qui est un opérateur différentiel. On a donc besoin de la proposition suivante.

Proposition 4.3 (La projection sur $\operatorname{Anh}_{k-1}(da)$ respecte la régularité)**.**
Soient $r \geqslant 0$, $1 \leqslant m \leqslant k-1$ *et* $a \in C^{r+2}\left(\Omega, \Lambda^1\right)$ *telle que* $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m$ *sur* Ω.

Alors, la projection orthogonale $\pi_{k-1} \colon \Lambda^{k-1} \to \operatorname{Anh}_{k-1}(da)$ *respecte la régularité. C'est-à-dire, pour tout* $\xi \in C^r\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$, $\pi_{k-1}(\xi) : \Omega \to \operatorname{Anh}_{k-1}(da)$ *définie par*

$$\pi_{k-1}(\xi)(x) = \pi_{k-1}(\xi(x))$$

vérifie $\pi_{k-1}(\xi) \in C^r(\Omega, \operatorname{Anh}_{k-1}(da))$

Démonstration. L'idée de la démonstration est la suivante. On souhaite reconstruire la projection orthogonale à partir d'une base orthonormale. On ramène donc le problème de construire une projection qui respecte la régularité à la construction d'une base régulière. Or, il est facile de construire une base régulière de $C^r(\Omega, \mathrm{Anh}_{k-1}(\omega_m))$, vu que ω_m est constante. On utilise donc le théorème de Darboux pour construire une base de $C^r(V, \mathrm{Anh}_{k-1}(da))$ où V appartient à une famille de voisinages qui couvrent Ω. On applique le procédé de Gram Schmidt à cette base pour la rendre orthonormale, puis on l'utilise pour définir une projection orthogonale $C^r\left(V, \Lambda^{k-1}\right) \to C^r(V, \mathrm{Anh}_{k-1}(da))$. Puis on constate que si V_1 et V_2 sont deux voisinages sur lesquels on a définit $\pi_i \colon C^r\left(V_i, \Lambda^{k-1}\right) \to C^r(V_i, \mathrm{Anh}_{k-1}(da))$ et que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, on a par unicité de la projection orthogonale que π_1 et π_2 coïncident sur $V_1 \cap V_2$. On peut donc définir la projection de façon globale.

Soit donc $x_0 \in \Omega$ quelconque. Par le théorème de Darboux (voir théorème A.8, page 143) il existe U_{x_0} un voisinage de x_0 et $\varphi_{x_0} \in \mathrm{Diff}^{r+1}(U_{x_0}, \varphi_{x_0}(U_{x_0}))$ tel que

$$\varphi_{x_0}^*(da) = \omega_m$$

sur U_{x_0}. Pour alléger les notations, on omettra l'indice x_0 pour le moment. Il faudra se rappeler à la fin lorsqu'on passera au résultat global que φ et U dépendent d'un x_0.

Soit maintenant $\{\beta_i\}_{i=1}^{l} \subset \Lambda^{k-1}$ une base orthonormale de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{Anh}_{k-1}(\omega_m) = \left\{u \in \Lambda^{k-1} \;:\; \omega_m \wedge u = 0\right\}$, qu'on voit ici comme un sous-espace vectoriel de Λ^{k-1}. Puis, on voit β_i comme une forme différentielle constante sur U. Alors, pour $\alpha \in C^r(U, \mathrm{Anh}_{k-1}(\omega_m))$, il existe $\alpha_i \in C^r(U)$ tel que $\alpha = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \beta_i$. En effet, pour tout $x \in U$, vu que $\{\beta_i\}_{i=1}^{l}$ est une base de $\mathrm{Anh}_{k-1}(\omega_m)$, il existe $\alpha_i(x) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i(x)\, \beta_i.$$

Pour établir la régularité des α_i, il suffit de constater qu'alors

$$\alpha_i = \langle \alpha, \beta_i \rangle \in C^r(U).$$

Soit maintenant pour $1 \leqslant i \leqslant l$, $\bar{b}_i := \left(\varphi^{-1}\right)^*(\beta_i) \in C^r\left(\varphi(U), \Lambda^{k-1}\right)$. Montrons que pour tout $\xi \in C^r(\varphi(U), \mathrm{Anh}_{k-1}(da))$, il existe $\xi_i \in C^r(\varphi(U))$ tels que

$$\xi = \sum_{i=1}^{l} \xi_i \bar{b}_i.$$

Soit donc ξ tel que $da \wedge \xi = 0$. Alors,

$$\omega_m \wedge \varphi^*(\xi) = \varphi^*(da \wedge \xi) = 0.$$

D'où, vu que $\varphi^*(\xi) \in C^r(U, \mathrm{Anh}_{k-1}(\omega_m))$, on a par les propriétés de $\{\beta_i\}_{i=1}^{l}$ qu'il existe $\alpha_i \in C^r(U)$ tels que

$$\varphi^*(\xi) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \beta_i.$$

Ainsi, vu que $\alpha_i \beta_i = \alpha_i \wedge \beta_i$, on a

$$\xi = \left(\varphi^{-1}\right)^* \left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \wedge \beta_i\right) = \sum_{i=1}^{l} \left(\alpha_i \circ \varphi^{-1}\right) \bar{b}_i.$$

Définissant donc $\xi_i = \alpha_i \circ \varphi^{-1} \in C^r(\varphi(U))$, on a montré que $\left\{\bar{b}_i\right\}_{i=1}^{l}$ génère $C^r(\varphi(U), \mathrm{Anh}_{k-1}(da))$. Pour voir qu'elle est linéairement indépendante en chaque point, si on suppose qu'il existe $x \in \varphi(U)$ et $\{\lambda_i\}_{i=1}^{l} \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \bar{b}_i(x) = 0,$$

alors, on a

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\beta_i=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\beta_i\left(\varphi^{-1}(x)\right)=\varphi^*\left(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\bar{b}_i\right)\left(\varphi^{-1}(x)\right)=\varphi^*\left(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\bar{b}_i(x)\right)\left(\varphi^{-1}(x)\right)=0,$$

ce qui implique $\lambda_i=0$ pour tout i vu que $\{\beta_i\}_{i=1}^{l}$ est une base de $\mathrm{Anh}_{k-1}(\omega_m)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à notre base $\left\{\bar{b}_i\right\}_{i=1}^{l}$. On pose donc

$$b_1=\frac{\bar{b}_1}{\left|\bar{b}_1\right|}\in C^r\left(\varphi(U),\mathrm{Anh}_{k-1}(da)\right)$$

$$b_{i+1}=\frac{\bar{b}_{i+1}-\sum_{j=1}^{i}\frac{\langle\bar{b}_j,\bar{b}_{i+1}\rangle}{\langle\bar{b}_j,\bar{b}_j\rangle}\bar{b}_j}{\left|\bar{b}_{i+1}-\sum_{j=1}^{i}\frac{\langle\bar{b}_j,\bar{b}_{i+1}\rangle}{\langle\bar{b}_j,\bar{b}_j\rangle}\bar{b}_j\right|}\in C^r\left(\varphi(U),\mathrm{Anh}_{k-1}(da)\right),$$

pour $1\leqslant i\leqslant l-1$.

On définit maintenant $\pi_{x_0}\colon C^r\left(\varphi(U),\Lambda^{k-1}\right)\to C^r\left(\varphi(U),\mathrm{Anh}_{k-1}(da)\right)$ par

$$\pi_{x_0}(\xi)=\sum_{i=1}^{l}\langle\xi,b_i\rangle\,b_i.$$

Remarquons alors, que pour tout $x\in\varphi(U)$,

$$\pi_{x_0}(\xi)(x)=\sum_{i=1}^{l}\langle\xi(x),b_i(x)\rangle\,b_i(x)$$

est la projection orthogonale de $\xi(x)$ sur $\mathrm{Anh}_{k-1}(da(x))$, vu que $\{b_i(x)\}_{i=1}^{l}$ est une base orthonormale de $\mathrm{Anh}_{k-1}(da(x))$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir $\pi_{k-1}\colon C^r\left(\Omega,\Lambda^{k-1}\right)\to C^r\left(\Omega,\mathrm{Anh}_{k-1}(da)\right)$ par

$$\pi_{k-1}(\xi)(x)=\pi_{x_0}(\xi)(x),$$

où x_0 est tel que $x\in\varphi_{x_0}(U_{x_0})$. Commençons par voir que π_{k-1} est bien définie. Si x_1 et x_2 sont tels que $x\in\varphi_{x_1}(U_{x_1})\cap\varphi_{x_2}(U_{x_2})$, alors, $\pi_{x_1}(\xi)(x)$ et $\pi_{x_2}(\xi)(x)$ sont deux projections orthogonales de $\xi(x)$ sur $\mathrm{Anh}_{k-1}(da(x))$. Par unicité de la projection orthogonale on a donc que $\pi_{x_1}(\xi)(x)=\pi_{x_2}(\xi)(x)$.

De plus, π_{k-1} hérite de la régularité des π_{x_0}, d'où on a le résultat. □

Remarque 4.4.
Remarquons que si $m\geqslant k$, alors, la projection sur le noyau est l'opérateur qui envoie tout sur 0, qui donc respecte aussi la régularité.

Maintenant qu'on a la régularité de la projection orthogonale, on peut passer à la preuve du théorème 4.1.

Démonstration du théorème 4.1. Les points (i) et (ii) sont des conséquences directes du fait que $L_a^k\circ L_a^{k-1}(\eta)=da\wedge\eta$ et de la proposition 4.3 respectivement. Passons donc à la preuve de (iii). Vu que $\mathrm{rang}[da]\equiv 2m\geqslant 2(n-k+1)$ on a par le théorème 3.1 qu'il existe $\xi\in C^{r-2}\left(\Omega,\Lambda^{k-1}\right)$ tel que

$$d\xi+a\wedge\xi=w.$$

Ainsi,

$$da\wedge\xi=dw+a\wedge w=0.$$

D'où, on a que $\xi \in \mathrm{Anh}_{k-1}(da)$. On en déduit donc que vu que π_{k-1} est la projection orthogonale sur $\mathrm{Anh}_{k-1}(da)$, on a que $\pi_{k-1}(\xi) = \xi$. On a donc que

$$w = L_a^{k-1}(\xi) = L_a^{k-1}(\pi_{k-1}(\xi)) = N^k(\xi)$$

qui est le résultat souhaité. □

4.1.1 Le cas où rang$[da] = 2$

On va montrer ici que l'opérateur noyau donné par le théorème 4.1 est localement surjectif également lorsqu'on fixe $m = 1$ et que $k \geqslant 2$. La raison pour laquelle on s'intéresse à ce cas là est que le théorème 4.1 nous donne la surjectivité de l'opérateur noyau lorsque m est grand (plus précisément $m \geqslant n-k+1$.) Ainsi, vu qu'on aura la surjectivité pour m le plus petit possible et pour m grand, il paraît naturel de conjecturer que l'opérateur est surjectif pour tout m. On va montrer le résultat en se réduisant au cas où $a = x_1 dx^2$. En effet, dans ce cas là, on pourra expliciter la projection $\pi_{k-1}\colon C^r\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right) \to C^r\left(\Omega, \mathrm{Anh}_{k-1}\left(dx^1 \wedge dx^2\right)\right)$. On devrait pouvoir généraliser le résultat au cas où $a = \sum_{i=1}^m x_{2i-1} dx^{2i}$, mais pour ça, il nous faudra expliciter

$$\pi_{k-1}\colon C^r\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right) \to C^r\left(\Omega, \mathrm{Anh}_{k-1}\left(\sum_{i=1}^m dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}\right)\right),$$

ce qui est un problème dont la complexité est similaire à la formule donnée dans la preuve du théorème 2.4.

Lemme 4.5.
Soit $1 \leqslant k-1 \leqslant n-2$, $r \geqslant 3$, $\Omega =]\alpha, \beta[^n$ *un hypercube,* $a = x_1 dx^2$ *et* $\pi_{k-1}^{dx^1 \wedge dx^2} = \pi_{k-1}^{da}\colon C^r\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right) \to C^r\left(\Omega, \mathrm{Anh}_{k-1}\left(dx^1 \wedge dx^2\right)\right)$ *la projection donnée par la proposition 4.3 et*

$$N_a^k := L_a^{k-1} \circ \pi_{k-1}^{da}.$$

Alors, pour tout $w \in C^r\left(\Omega, \Lambda^k\right)$, $dw + a \wedge w = 0$ *si et seulement si il existe* $\varphi \in C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$ *tel que*

$$N_a^k(\varphi) = w.$$

Démonstration. La démonstration se sépare en 5 étapes. En premier, on explicite notre hypothèse $dw + a \wedge w = 0$, ensuite, on explicite l'opérateur N_a^k et pour finir, on construit φ, une solution de $N_a^k(\varphi) = w$ en invoquant le lemme de Poincaré à 3 reprises. On prendra également le temps d'interpréter les équations qu'on écrit dans le cas $k = 2$, car la démonstration est sensiblement différente dans ce cas là.

Soit $w \in C^r\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ tel que $dw + a \wedge w = 0$. On commence par fixer quelques notations. On écrit $w = \sum_{J \in \mathcal{I}_k} w^J dx^J$, et $\mathcal{I}_k^{\geqslant 3} = \{I = \{i_1, ..., i_k\} \in \mathcal{I}_k \ : \ i_j \geqslant 3 \text{ pour tout } j\}$.

Étape 1 : On explicite $dw + a \wedge w = 0$ en regardant chaque composante de cette équation.

On a pour tout $J = \{j_3, ..., j_{k+1}\} \in \mathcal{I}_{k-1}^{\geqslant 3}$.

$$(dw + a \wedge w)^{\{1,2\} \cup J} = w_{x_1}^{\{2\} \cup J} - w_{x_2}^{\{1\} \cup J} + \sum_{t=3}^{k+1} (-1)^{t+1} w_{x_{j_t}}^{\{1,2\} \cup J \setminus \{j_t\}} - x_1 w^{\{1\} \cup J} = 0. \tag{4.1}$$

Si $k = 2$, ceci s'écrit : pour tout $3 \leqslant j \leqslant n$,

$$w_{x_1}^{2j} - w_{x_2}^{1j} + w_{x_j}^{12} - x_1 w^{1j} = 0. \tag{4.2}$$

Pour tout $J = \{j_2, ..., j_{k+1}\} \in \mathcal{I}_k^{\geqslant 3}$

$$(dw + a \wedge w)^{\{1\} \cup J} = w_{x_1}^J - \sum_{t=2}^{k+1} (-1)^t w_{x_{j_t}}^{\{1\} \cup J \setminus \{j_t\}} = 0, \tag{4.3}$$

$$(dw + a \wedge w)^{\{2\} \cup J} = w^J_{x_2} - \sum_{t=2}^{k+1} (-1)^t \, w^{\{2\} \cup J \setminus \{j_t\}}_{x_{j_t}} + x_1 w^J = 0, \tag{4.4}$$

ce qui, quand $k = 2$ s'écrit : pour tout $3 \leqslant i < j \leqslant n$,

$$w^{ij}_{x_1} - w^{1j}_{x_i} + w^{1i}_{x_j} = 0, \tag{4.5}$$

$$w^{ij}_{x_2} - w^{2j}_{x_i} + w^{2i}_{x_j} = 0. \tag{4.6}$$

Et pour tout $J = \{j_1, ..., j_{k+1}\} \in \mathcal{I}^{\geqslant 3}_{k+1}$,

$$(dw + a \wedge w)^J = \sum_{t=1}^{k+1} (-1)^{t+1} \, w^{J \setminus \{x_{j_t}\}}_{x_{j_t}} = 0, \tag{4.7}$$

ce qui, quand $k = 2$ s'écrit : pour tout $3 \leqslant i < j < l \leqslant n$,

$$w^{jl}_{x_i} - w^{il}_{x_j} + w^{ij}_{x_l} = 0. \tag{4.8}$$

De plus, on sait que nécessairement, $dx^1 \wedge dx^2 \wedge w = 0$ donc pour tout $J \in \mathcal{I}_k$, $\{1, 2\} \cap J = \emptyset$ implique $w^J = 0$. Donc, (4.3) et (4.4) se réduisent à

$$\sum_{t=2}^{k+1} (-1)^t \, w^{\{1\} \cup J \setminus \{j_t\}}_{x_{j_t}} = 0 \tag{4.9}$$

$$\sum_{t=2}^{k+1} (-1)^t \, w^{\{2\} \cup J \setminus \{j_t\}}_{x_{j_t}} = 0, \tag{4.10}$$

tandis que (4.5) et (4.6) se réduisent à

$$-w^{1j}_{x_i} + w^{1i}_{x_j} = 0, \tag{4.11}$$

$$-w^{2j}_{x_i} + w^{2i}_{x_j} = 0. \tag{4.12}$$

De plus, (4.7) et (4.8) se réduisent à $0 = 0$.

Étape 2 : On explicite $N^k_a(\varphi)$.

Soit $\varphi \in C^r\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$. Vu que $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \varphi = 0$ est équivalent à φ^J=0 dès que $\{1, 2\} \cap J = \emptyset$, on a

$$\pi^{da}_{k-1}(\varphi) = \sum_{I \in \mathcal{I}^{\geqslant 3}_{k-3}} \varphi^{\{1,2\} \cup I} dx^{\{1,2\} \cup I}$$

$$+ \sum_{I \in \mathcal{I}^{\geqslant 3}_{k-2}} \varphi^{\{1\} \cup I} dx^{\{1\} \cup I}$$

$$+ \sum_{I \in \mathcal{I}^{\geqslant 3}_{k-2}} \varphi^{\{2\} \cup I} dx^{\{2\} \cup I},$$

et quand $k = 2$, on a

$$\pi^{da}_1(\varphi) = \varphi^1 dx^1 + \varphi^2 dx^2.$$

Et donc, on a

$$N_a^k(\varphi) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{I}_{k-2}^{\geqslant 3} \\ J=\{j_3,\dots,j_k\}}} \left\{ \varphi_{x_1}^{\{2\}\cup J} - \varphi_{x_2}^{\{1\}\cup J} + \sum_{t=3}^{k} (-1)^{t+1} \varphi_{x_{j_t}}^{\{1,2\}\cup J \backslash \{j_t\}} - x_1 \varphi^{\{1\}\cup J} \right\} dx^{\{1,2\}\cup J}$$

$$+ \sum_{\substack{J \in \mathcal{I}_{k-1}^{\geqslant 3} \\ J=\{j_2,\dots,j_k\}}} \left\{ -\sum_{t=2}^{k} (-1)^t \varphi_{x_{j_t}}^{\{1\}\cup J \backslash \{j_t\}} \right\} dx^{\{1\}\cup J}$$

$$+ \sum_{\substack{J \in \mathcal{I}_{k-1}^{\geqslant 3} \\ J=\{j_2,\dots,j_k\}}} \left\{ -\sum_{t=2}^{k} (-1)^t \varphi_{x_{j_t}}^{\{2\}\cup J \backslash \{j_t\}} \right\} dx^{\{2\}\cup J},$$

ou lorsque $k=2$,

$$N_a^2(\varphi) = \left(\varphi_{x_1}^2 - \varphi_{x_2}^1 - x_1 \varphi^1\right) dx^1 \wedge dx^2 - \sum_{j=3}^{n} \varphi_{x_j}^1 dx^1 \wedge dx^j - \sum_{j=3}^{n} \varphi_{x_j}^2 dx^2 \wedge dx^j$$

Étape 3 : On construit $\left\{\varphi^{\{1\}\cup I}\right\}_{I \in \mathcal{I}_{k-2}^{\geqslant 3}} \subset C^r(\Omega)$ tel que pour tout $J = \{j_2, \dots, j_k\} \in \mathcal{I}_{k-1}^{\geqslant 3}$

$$\sum_{t=2}^{k} (-1)^t \varphi_{x_{j_t}}^{\{1\}\cup J \backslash \{j_t\}} = -w^{\{1\}\cup J}.$$

Pour ceci, on constate que x_1 et x_2 ne jouent que le rôle de paramètres dans l'équation ci-dessus. En effet, aucune dérivée n'est prise par rapport à x_1 ou x_2. On regarde donc cette équation comme une équation de la forme $d\psi = v$ avec ψ, une $k-2$ forme sur $\mathbb{R}^{n-2}$ et v une $k-1$ forme sur $\mathbb{R}^{n-2}$. On écrit donc $\mathcal{I}_k^{n-2}$ pour les multi-indices de longueur k où chaque indice est plus petit que $n-2$. En l'absence de cet indice en haut, on considère les multi-indices avec des éléments pouvant aller jusqu'à n. Remarquons qu'on a alors une bijection $\mathcal{I}_k^{n-2} \leftrightarrow \mathcal{I}_k^{\geqslant 3}$ donnée par $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{I}_k^{n-2} \mapsto (I+2) = \{i_1+2, .., i_k+2\} \in \mathcal{I}_k^{\geqslant 3}$ et son inverse $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{I}_k^{\geqslant 3} \mapsto (I-2) = \{i_1-2, \dots, i_k-2\} \in \mathcal{I}_k^{n-2}$. On définit maintenant $v \in C^r\left(]\alpha, \beta[^{n-2} \times]\alpha, \beta[^2, \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^{n-2})\right)$ par

$$v^J(y_1, \dots, y_{n-2}, z_1, z_2) = -w^{\{1\}\cup(J+2)}(z_1, z_2, y_1, \dots, y_{n-2})$$

pour tout $J \in \mathcal{I}_{k-1}^{n-2}$. Alors, on a pour tout $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{I}_k^{n-2}$,

$$\begin{aligned} [d_y v]^I &= \sum_{t=1}^{k} (-1)^{t+1} v_{y_{i_t}}^{I \backslash \{i_t\}} \\ &= \sum_{t=1}^{k} (-1)^t w_{x_{i_t+2}}^{\{1\}\cup(I+2)\backslash\{i_t+2\}}. \end{aligned}$$

En posant $J = \{j_2, \dots, j_{k+1}\} = \{i_1+2, \dots, i_k+2\} = I+2$, on a

$$\begin{aligned} [d_y v]^I &= \sum_{t=1}^{k} (-1)^t w_{x_{i_{t+1}}}^{\{1\}\cup J \backslash \{j_{t+1}\}} \\ &= -\sum_{t=2}^{k+1} (-1)^t w_{x_{j_t}}^{\{i\}\cup J \backslash \{j_t\}} \overset{(4.9)}{=} 0. \end{aligned}$$

D'où par le théorème A.16, il existe $\psi \in C^r\left(]\alpha,\beta[^{n-2}\times]\alpha,\beta[^2,\Lambda^{k-2}\left(\mathbb{R}^{n-2}\right)\right)$ tel que

$$d_y\psi(y,z) = v(y,z),$$

c'est-à-dire pour tout $I=\{i_1,...,i_{k-1}\}\in\mathcal{I}_{k-1}^{n-2}$,

$$\sum_{t=1}^{k-1}(-1)^{t+1}\psi_{y_{i_t}}^{I\setminus\{i_t\}}(y_1,...,y_{n-2},z_1,z_2) = v^I(y_1,...,y_{n-2},z_1,z_2)$$

pour tout $y\in]\alpha,\beta[^{n-2}$ et $z\in]\alpha,\beta^2[$. On définit pour tout $I\in\mathcal{I}_{k-2}^{\geqslant 3}$,

$$\varphi^{\{1\}\cup I}(x) = \psi^{I-2}(x_3,...,x_n,x_1,x_2),$$

pour tout $x\in]\alpha,\beta[^n$. Alors, pour tout $J=\{j_2,...,j_k\}\in\mathcal{I}_{k-1}^{\geqslant 3}$,

$$\begin{aligned}\sum_{t=2}^{k}(-1)^t\varphi_{x_{j_t}}^{\{1\}\cup J\setminus\{j_t\}} &= \sum_{t=2}^{k}(-1)^t\frac{\partial}{\partial x_{j_t}}\left[\psi^{(J\setminus\{j_t\}-2)}(x_3,...,x_n,x_1,x_2)\right]\\ &= \sum_{t=2}^{k}(-1)^t\psi_{y_{j_t-2}}^{(J-2)\setminus\{j_t-2\}}(x_3,...,x_n,x_1,x_2).\end{aligned}$$

Si on écrit maintenant $I=\{i_1,...,i_{k-2}\}=\{j_2-2,...,j_{k-1}-2\}=J-2\in\mathcal{I}_{k-1}^{n-2}$, alors,

$$\begin{aligned}\sum_{t=2}^{k}(-1)^t\varphi_{x_{j_t}}^{\{1\}\cup J\setminus\{j_t\}} &= \sum_{t=2}^{k}(-1)^t\psi_{y_{i_{t-1}}}^{I\setminus\{i_{t-1}\}}(x_3,...,x_n,x_1,x_2)\\ &= \sum_{t=1}^{k}(-1)^{t+1}\psi_{y_{i_t}}^{I\setminus\{i_t\}}(x_3,...,x_n,x_1,x_2)\\ &= v^I(x_3,...,x_n,x_1,x_2)\\ &= -w^{\{1\}\cup(I+2)}(x)\\ &= -w^{\{1\}\cup J}(x),\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu. Lorsque $k=2$, on résout

$$\nabla_{(x_3,...,x_n)}\varphi^1 = (-w^{13},...,-w^{1n}),$$

qui est possible par (4.11). Remarquons que $\varphi^1\in C^r(]\alpha,\beta[^n)$.

Étape 4 : On construit $\left\{\varphi^{\{2\}\cup I}\right\}_{I\in\mathcal{I}_{k-2}^{\geqslant 3}}\subset C^r(\Omega)$ tel que pour tout $J=\{j_2,...,j_k\}\in\mathcal{I}_{k-1}^{\geqslant 3}$,

$$\sum_{t=2}^{k}(-1)^t\varphi_{x_{j_t}}^{\{2\}\cup J\setminus\{j_t\}} = -w^{\{2\}\cup J}.$$

La construction est en tout point similaire à l'étape 3.

Étape 5 : On construit $\left\{\varphi^{\{1,2\}\cup I}\right\}_{I\in\mathcal{I}_{k-3}^{\geqslant 3}}\subset C^{r-1}(\Omega)$ tel que pour tout $J=\{j_3,...,j_k\}\in\mathcal{I}_{k-2}^{\geqslant 3}$,

$$\sum_{t=3}^{k}(-1)^t\varphi_{x_{j_t}}^{\{1,2\}\cup J\setminus\{j_t\}} = w^{\{1,2\}\cup J} - \varphi_{x_1}^{\{2\}\cup(J+2)} + \varphi_{x_2}^{\{1\}\cup J} + x_1\varphi^{\{1\}\cup J}.$$

On définit $v\in C^{r-1}\left(]\alpha,\beta[^{n-2}\times]\alpha,\beta[^2,\Lambda^{k-2}\left(\mathbb{R}^{n-2}\right)\right)$ par

$$\begin{aligned}v^J(y_1,...,y_{n-2},z_1,z_2) =& w^{\{1,2\}\cup(J+2)}(z_1,z_2,y_1,...,y_{n-2}) - \varphi_{x_1}^{\{2\}\cup(J+2)}(z_1,z_2,y_1,...,y_{n-2})\\ &+ \varphi_{x_2}^{\{1\}\cup(J+2)}(z_1,z_2,x_1,...,x_{n-2})\end{aligned}$$

$$+ z_1 \varphi^{\{1\} \cup (J+2)} (z_1, z_2, x_1, ..., x_{n-2}),$$

pour tout $J \in \mathcal{I}_{k-2}^{n-2}$. Alors, pour tout $I = \{i_1, ..., i_{k-1}\} \in \mathcal{I}_{k-2}^{n-2}$,

$$\begin{aligned}
[d_y v]^I &= \sum_{t=1}^{k-1} (-1)^{t+1} v_{y_{i_t}}^{I \backslash \{i_t\}} \\
&= \sum_{t=1}^{k-1} (-1)^{t+1} \left[w_{x_{j_t+2}}^{\{1,2\} \cup (I \backslash \{i_t\}+2)} - \varphi_{x_1 x_{i_t+2}}^{\{2\} \cup (I \backslash \{i_t\}+2)} + \varphi_{x_2 x_{i_t+2}}^{\{1\} \cup (I \backslash \{i_t\}+2)} + z_1 \varphi_{x_{i_t+2}}^{\{1\} \cup (I \backslash \{i_t\}+2)} \right]
\end{aligned}$$

Si maintenant on écrit $J = \{j_2, ..., j_k\} = \{i_1 + 2, ..., i_{k-1} + 2\} \in \mathcal{I}_{k-2}^{\geqslant 3}$, on a

$$\begin{aligned}
[d_y v]^I &= \sum_{t=2}^{k} (-1)^t \, w_{x_{j_t}}^{\{1,2\} \cup J \backslash \{j_t\}} - \sum_{t=2}^{k} (-1)^t \, \varphi_{x_1 x_{j_t}}^{\{2\} \cup J \backslash \{j_t\}} \\
&= \sum_{t=2}^{k} (-1)^t \, \varphi_{x_2 x_{j_t}}^{\{1\} \cup J \backslash \{j_t\}} + z_1 \sum_{t=2}^{k} (-1)^t \, \varphi_{x_{j_t}}^{\{1\} \cup J \backslash \{j_t\}}.
\end{aligned}$$

Utilisant nos étapes 3 et 4, on déduit

$$[d_y v]^I = \sum_{t=2}^{k} (-1)^t \, w_{x_{j_t}}^{\{1,2\} \cup J \backslash \{j_t\}} + w_{x_1}^{\{2\} \cup J} - w_{x_2}^{\{1\} \cup J} - z_1 w^{\{1\} \cup J} \overset{(4.1)}{=} 0.$$

Ainsi, par le théorème A.16, il existe $\psi \in C^{r-1} \left( ]\alpha, \beta[^{n-2} \times]\alpha, \beta[^2 ; \Lambda^{k-3} \left(\mathbb{R}^{n-2} \right) \right)$ tel que

$$d_y \psi (y, z) = v (y, z).$$

On définit alors pour $I \in \mathcal{I}_{k-3}^{\geqslant 3}$ et $x \in \Omega$,

$$\varphi^{\{1,2\} \cup I} (x) = \psi^{I-2} (x_3, ..., x_n, x_1, x_2).$$

On vérifie comme dans l'étape 3 que $\left\{ \varphi^{\{1,2\} \cup I} \right\}_{I \in \mathcal{I}_{k-3}^{n-2}}$ ainsi définie est une solution du problème cherché.

Lorsque $k = 2$, on ne peut pas construire φ^{12} car $\varphi \in \Lambda^1$. Néanmoins, dans ce cas là, on pose $\xi = w^{12} - \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^1 + x_1 \varphi^1$, et on constate que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\begin{aligned}
\xi_{x_j} &= w_{x_j}^{12} - \varphi_{x_1 x_j}^2 + \varphi_{x_2 x_j}^1 + x_1 \varphi_{x_j}^1 \\
&= w_{x_j}^{12} + w_{x_1}^{2j} - w_{x_2}^{1j} - x_1 w^{1j} \overset{(4.2)}{=} 0,
\end{aligned}$$

ainsi, ξ est une fonction de x_1 et x_2 uniquement. De plus, par le théorème A.14, il existe alors $\eta \in C^{r-1} \left( ]\alpha, \beta[^2 \right)$ tel que $\eta_{x_1} = \xi$. Remplaçant φ^2 par $\varphi^2 + \eta$, on a alors que $N_a^2 (\varphi) = w$.

Pour terminer la preuve, on considère

$$\begin{aligned}
\varphi := & \sum_{I \in \mathcal{I}_{k-3}^{\geqslant 3}} \varphi^{\{1,2\} \cup I} dx^{\{1,2\} \cup I} \\
& + \sum_{I \in \mathcal{I}_{k-2}^{\geqslant 3}} \varphi^{\{1\} \cup I} dx^{\{1\} \cup I} \\
& + \sum_{I \in \mathcal{I}_{k-2}^{\geqslant 3}} \varphi^{\{2\} \cup I} dx^{\{2\} \cup I}.
\end{aligned}$$

Par construction, on a que $N_a^k (\varphi) = w$. L'autre implication étant triviale, ceci termine la preuve.

$\square$

Proposition 4.6.
Soit $n \geqslant 3$, $r \geqslant 3$, $a \in C^{r+3}\left(\Omega, \Lambda^1\right)$ tel que $\operatorname{rang}[da] \equiv 2$ *sur Ω. Soit $N^k : C^2\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right) \to \operatorname{Ker} L_a^k$ l'opérateur noyau donné par le théorème 4.1 (ii).*

Alors, pour tout $w \in C^{r+2}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ tel que $dw + a \wedge w = 0$ et pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe U un voisinage de x_0 et $\xi \in C^r\left(U, \Lambda^{k-1}\right)$ tel que

$$N^k(\xi) = w$$

sur U.

Démonstration. Soit donc $w \in C^{r+2}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ tel que $dw + a \wedge w = 0$ et $x_0 \in \Omega$. Par le théorème de Darboux (théorème A.8), il existe $\varphi \in \operatorname{Diff}^{r+2}\left(\varphi^{-1}(U), U\right)$ tel que

$$\varphi^*(da) = dx^1 \wedge dx^2$$

sur $\varphi^{-1}(U)$. Remarquons qu'on peut supposer sans perte de généralité que $\varphi^{-1}(U)$ est un cube. Ainsi,

$$d\left[x_1 dx^2 - \varphi^*(a)\right] = 0$$

sur $\varphi^{-1}(U)$. Donc, par le lemme de Poincaré, vu que $\varphi^*(a) \in C^{r+1}\left(\varphi^{-1}(U), \Lambda^1\right)$, il existe $\theta \in C^{r+1}\left(\varphi^{-1}(U), \Lambda^0\right)$ tel que $\varphi^*(a) = x_1 dx^2 + d\theta$. sur $\varphi^{-1}(U)$. Ainsi, on a

$$d\left(e^\theta \varphi^*(w)\right) + x_1 dx^2 \wedge e^\theta \varphi^*(w) = e^\theta \varphi^*(dw + a \wedge w) = 0$$

sur $\varphi^{-1}(U)$. Vu que $e^\theta \varphi^*(w) \in C^{r+1}\left(\varphi^{-1}(U), \Lambda^k\right)$, par le lemme 4.5, il existe $\xi_1 \in C^r\left(\varphi^{-1}(U), \Lambda^{k-1}\right)$ tel que

$$N^k_{x_1 dx^2}(\xi_1) = e^\theta \varphi^*(w)$$

sur $\varphi^{-1}(U)$. C'est-à-dire

$$L^{k-1}_{x_1 dx^2}\left(\pi_{k-1}^{dx^1 \wedge dx^2}(\xi_1)\right) = e^\theta \varphi^*(w).$$

Ainsi,

$$L^{k-1}_{x_1 dx^2 + d\theta}\left(e^{-\theta}\pi_{k-1}^{dx^1 \wedge dx^2}(\xi_1)\right) = e^{-\theta} L^{k-1}_{x_1 dx^2}\left(\pi_{k-1}^{dx^1 \wedge dx^2}(\xi_1)\right) = \varphi^*(w)$$

sur $\varphi^{-1}(U)$. Donc, on a

$$w = \left(\varphi^{-1}\right)^*\left[L^{k-1}_{x_1 dx^2 + d\theta}\left(e^{-\theta}\pi_{k-1}^{dx^1 \wedge dx^2}(\xi_1)\right)\right] = L_a^{k-1}\left(\left(\varphi^{-1}\right)^*\left(e^{-\theta}\pi_{k-1}^{dx^1 \wedge dx^2}(\xi_1)\right)\right)$$

sur U. Définissons maintenant

$$\xi = \left(\varphi^{-1}\right)^*\left(e^{-\theta}\pi_{k-1}^{dx^1 \wedge dx^2}(\xi_1)\right) \in C^r\left(U, \Lambda^k\right).$$

Alors,

$$L_a^{k-1}(\xi) = w$$

sur U. De plus,

$$da \wedge \xi = L_a^k(w) = 0.$$

Donc, $\pi_{k-1}^{da}(\xi) = \xi$, et on a bien que

$$N^k(\xi) = w$$

sur U. □

4.2 Le cas où rang$[da] \equiv 2m = 2k$

Comme déjà mentionné, dans le cas où rang$[da] = 2k$, la construction de l'opérateur noyau ci-dessus nous donne l'opérateur trivial qui envoie tout sur 0. On va voir deux exemples qui nous mènent à conjecturer deux choses. Premièrement, il n'existe pas d'opérateur noyau d'ordre 1 non trivial. Deuxièmement l'étude des opérateurs noyau n'est pas un problème à n variables mais est un problème dont le nombre de variables est fonction k et donc de rang$[da]$.

Exemple 4.7.
Considérons $n = 3$, $k = 1$ et $a = x_1 dx^2$. On a donc

$$\begin{aligned} dw + a \wedge w = &\left(w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1\right) dx^1 \wedge dx^2 \\ &+ \left(w^3_{x_1} - w^1_{x_3}\right) dx^1 \wedge dx^3 \\ &+ \left(w^3_{x_2} - w^2_{x_3} + x_1 w^3\right) dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Si on suppose que $dw + a \wedge w = 0$, alors, on a nécessairement $da \wedge w = 0$. Ce qui se traduit ici par $w^3 = 0$. Ainsi $w \in \mathrm{Ker}L^1_a$ si et seulement si

$$\begin{aligned} w^3 &= 0 \\ w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1 &= 0 \\ w^1_{x_3} &= 0 \\ w^2_{x_3} &= 0. \end{aligned}$$

On voit ainsi que nécessairement, un élément de $\mathrm{Ker}L^1_a$ est indépendant de x_3.

Ainsi, w est dans le noyau si et seulement si $w^3 = 0$, w est indépendant de x_3 et $w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1 = 0$. On s'intéresse donc à un opérateur noyau de la forme

$$w = N^1 \left(\varphi\left(x_1, x_2\right)\right)$$

tel que

$$w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1 = 0.$$

Une première étape serait de chercher des opérateurs noyau d'ordre 1, c'est à dire

$$\begin{aligned} N^1(\varphi) = &\left(\alpha^1_1 \varphi_{x_1} + \alpha^1_2 \varphi_{x_2} + \beta^1 \varphi\right) dx^1 \\ &+ \left(\alpha^2_1 \varphi_{x_1} + \alpha^2_2 \varphi_{x_2} + \beta^2 \varphi\right) dx^2. \end{aligned}$$

Mais en remplaçant successivement φ par 1, x_1, x_2, x_1^2, $x_1 x_2$ et x_2^2, on constate que pour qu'un tel opérateur soit un opérateur noyau, il faut que $N^1 \equiv 0$. On voit ainsi que dans ce cas, il n'existe pas d'opérateur noyau d'ordre 1.

Néanmoins, si on définit

$$N^1(\varphi) = \varphi_{x_1 x_1} dx^1 + \left(\varphi_{x_1 x_2} + x_1 \varphi_{x_1} - \varphi\right) dx^2,$$

pour $\varphi = \varphi\left(x_1, x_2\right)$, on peut montrer que c'est un opérateur noyau surjectif d'ordre 2. En effet, si on définit $w = N^1(\varphi)$, alors, on a

$$w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1 = \varphi_{x_1 x_1 x_2} + \varphi_{x_1} + x_1 \varphi_{x_1 x_1} - \varphi_{x_1} - \varphi_{x_1 x_1 x_2} - x_1 \varphi_{x_1 x_1} = 0.$$

On a donc bien que N^1 est un opérateur noyau. Montrons maintenant que N^1 est surjectif. Soit donc $w \in \mathrm{Ker}L^1_a$. Comme on a montré plus haut, on a que $w^3 = 0$ et $w = w\left(x_1, x_2\right)$.

Commençons par résoudre (une solution régulière de ceci existe par le théorème A.14)

$$\alpha_{x_1x_1} = w^1.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[w^2 - \alpha_{x_1x_2} - x_1\alpha_{x_1} + \alpha\right] =& w^2_{x_1} - \alpha_{x_1x_1x_2} - \alpha_{x_1} - x_1\alpha_{x_1x_1} + \alpha_{x_1} \\ =& w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1 = 0.\end{aligned}$$

Soit donc $\psi = \psi(x_2) = w^2 - \alpha_{x_1x_2} - x_1\alpha_{x_1} + \alpha$, et définissons

$$\varphi = \alpha - \psi.$$

Alors

$$\varphi_{x_1x_1} = w^1,$$

et

$$\varphi_{x_1x_2} + x_1\varphi_{x_1} - \varphi = \alpha_{x_1x_2} + x_1\alpha_{x_1} - \varphi + \psi = w^2.$$

D'où, on a que

$$N^1(\varphi) = w,$$

et N^1 est donc surjectif.

On généralisera dans la proposition 5.8 le résultat de cet exemple. On montrera que si $k = 1$ et $a = x_1dx^2$ et n est quelconque alors, il n'existe pas d'opérateur noyau d'ordre 1, mais il en existe un d'ordre 2 surjectif.

Considérons maintenant $n = 3$, $k = 1$, et $a = x_1dx^2 + x_1dx^3$. Alors, rang$[da] = 2$, et on a

$$\begin{aligned}dw + a \wedge w =& \left(w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1w^1\right)dx^1 \wedge dx^2 \\ &+ \left(w^3_{x_1} - w^1_{x_3} - x_1w^1\right)dx^1 \wedge dx^3 \\ &+ \left(w^3_{x_2} - w^2_{x_3} + x_1w^3 - x_1w^2\right)dx^2 \wedge dx^3.\end{aligned}$$

Si on suppose que $dw + a \wedge w = 0$, alors, on a nécessairement que $da \wedge w = 0$ Ce qui se traduit ici par $w^2 = w^3$. De plus, ceci implique,

$$\begin{aligned}w^1_{x_2} &= w^1_{x_3} \\ w^2_{x_2} &= w^2_{x_3}.\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $\xi^1(x, y, z) = w^1(x, y - z, z)$, on a

$$\xi^1_z = -w^1_{x_2}(x, y - z, z) + w^1_{x_3}(x, y - z, z) = 0.$$

Donc, $\xi^1 = \xi^1(x, y)$ et $\xi^1(x_1, x_2 + x_3) = w^1(x_1, x_2, x_3)$. Et, par le même argument, on trouve $\xi^2 = \xi^2(x, y)$ tel que $\xi^2(x_1, x_2 + x_3) = w^2(x_1, x_2, x_3) = w^3(x_1, x_2, x_3)$.

On voit ainsi que nécessairement w est une fonction de x_1 et $x_2 + x_3$. De plus, $dw + a \wedge w = 0$ se traduit par

$$\xi^2_x - \xi^1_y - x\xi^1 = 0.$$

Comme dans le premier exemple, on obtient comme condition pour que w soit dans $\mathrm{Ker}L^1_a$ une condition sur les variables ainsi qu'une équation différentielle. On cherche donc un opérateur noyau de la forme

$$\xi = \left(\xi^1, \xi^2\right) = \tilde{N}^1(\varphi)$$

avec $\varphi = \varphi(x, y)$. Après, définissant, $N^1(\varphi)(x_1, x_2, x_3) = \tilde{N}^1(\varphi)(x_1, x_2 + x_3)$ on aura obtenu un opérateur noyau pour w.

Si on suppose que N^1 est un opérateur d'ordre 1, alors, il a la forme

$$\tilde{N}^1(\varphi) = \left(\alpha_1^1\varphi_x + \alpha_2^1\varphi_y + \beta^1\varphi, \alpha_1^2\varphi_x + \alpha_2^2\varphi_y + \beta^2\varphi\right).$$

Ainsi, pour que $\tilde{N}^1$ nous donne un opérateur noyau, il faut nécessairement,

$$\begin{aligned}
0 = &\left(\alpha_1^2\right)_x\varphi_x + \left(\alpha_1^2\right)\varphi_{xx} + \left(\alpha_2^2\right)_x\varphi_y + \left(\alpha_2^2\right)\varphi_{xy} + \left(\beta^2\right)_x\varphi + \left(\beta^2\right)\varphi_x \\
&- \left[\left(\alpha_1^1\right)_y\varphi_x + \left(\alpha_1^1\right)\varphi_{xy} + \left(\alpha_2^1\right)_y\varphi_y + \left(\alpha_2^1\right)\varphi_{yy} + \left(\beta^1\right)_y\varphi + \left(\beta^1\right)\varphi_y\right] \\
&- x\left[\left(\alpha_1^1\right)\varphi_x + \left(\alpha_2^1\right)\varphi_y + \left(\beta^1\right)\varphi\right].
\end{aligned}$$

Or, en testant successivement avec φ égal à 1, x, y, x^2, xy et y^2, on voit que pour que $\tilde{N}^1$ nous donne un opérateur noyau, il faut nécessairement que $\tilde{N}^1 \equiv 0$.

Par contre, si on définit

$$\begin{aligned}
N^1(\varphi) = &\varphi_{xx}(x_1, x_2 + x_3)\,dx^1 \\
&+ \left[\varphi_{xy}(x_1, x_2 + x_3) + x_1\varphi_x(x_1, x_2 + x_3) - \varphi(x_1x_2 + x_3)\right]\left(dx^2 + dx^3\right),
\end{aligned}$$

on peut montrer que N^1 est un opérateur noyau surjectif.

Commençons par montrer qu'il s'agit d'un opérateur noyau. Si $w = N^1(\varphi)$, alors,

$$\begin{aligned}
w_{x_1}^2 - w_{x_2}^1 - x_1w^1 = \varphi_{xxy} + \varphi_x + x_1\varphi_{xx} - \varphi_x - \varphi_{xxy} - x_1\varphi_{xx} &= 0 \\
w_{x_1}^3 - w_{x_3}^1 - x_1w^1 = w_{x_1}^2 - w_{x_2}^1 - x_1w^1 &= 0 \\
w_{x_2}^3 - w_{x_3}^2 + x_1w^3 - x_1w^2 &= 0,
\end{aligned}$$

d'où, N^1 est un opérateur noyau. Voyons maintenant la surjectivité. Comme montré plus haut, il existe $\xi^1 = \xi^1(x,y)$ et $\xi^2 = \xi^2(x,y)$ tels que $w^1 = \xi^1(x_1, x_2 + x_3)$ et $w^2 = w^3 = \xi^2(x_1, x_2 + x_3)$. Commençons par considérer (à l'aide du théorème A.14) $\psi = \psi(x,y)$ tel que

$$\psi_{xx} = \xi^1.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[\xi^2 - \psi_{xy} - x\psi_x + \psi\right] = &\xi_x^2 - \psi_{xxy} - \psi_x - x\psi_{xx} + \psi_x \\
= &\xi_x^2 - \xi_y^1 - x\xi^1 = 0.
\end{aligned}$$

Soit donc $\eta = \eta(y) = \xi^2 - \psi_{xy} - x\psi_x + \psi$ et définissons $\varphi = \psi - \eta$. Alors,

$$\begin{aligned}
N^1(\varphi) = &\varphi_{xx}(x_1, x_2 + x_3)\,dx^1 \\
&+ \left[\varphi_{xy}(x_+, x_2 + x_3) + x_1\varphi_x(x_1, x_2 + x_3) - \varphi(x_1x_2 + x_3)\right]\left(dx^2 + dx^3\right) \\
= &\psi_{xx}(x_1, x_2 + x_3)\,dx^1 \\
&+ \left[\psi_{xy}(x_+, x_2 + x_3) + x_1\psi_x(x_1, x_2 + x_3) - \psi(x_1x_2 + x_3)\right. \\
&\quad \left.+ \eta(x_2 + x_3)\right]\left(dx^2 + dx^3\right) \\
= &\xi^1(x_1, x_2 + x_3)\,dx^1 + \xi^2(x_1, x_2 + x_3)\left(dx^1 + dx^3\right) = w,
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché.

Remarque 4.8.
Il est intéressant de noter que dans les cas présentés ci-dessus, il apparaît que l'opérateur noyau n'est pas défini sur des formes différentielles de Λ^{k-1} quelconques, mais sur des formes différentielles dont

les variables ont une certaine structure (indépendant de x_3 dans le premier cas, et fonction de $x_2 + x_3$ dans le deuxième.) On arrive donc à un problème qui a en réalité deux variables. Si on reprend la même question dans le cas où $n = 2$, $k = 1$ et $a = x_1 dx^2$, on obtient également un opérateur noyau d'ordre 2 surjectif, sans les conditions sur les variables(voir et adapter l'exemple 14 (ii) dans [6].) On conjecture donc que le nombre de variables avec lequel ce problème est défini dépend en réalité de $k = m$, mais étonnamment pas de la dimension n.

Il convient néanmoins de préciser qu'en général, φ ne peut dépendre que de deux variables mais les coefficients de N^1 peuvent dépendre de plus de variables. En effet, prenons par exemple $a = x_1 dx^2 + x_3 dx^3$, alors, rang$[da] = $ rang$[dx^1 \wedge dx^2] = 2$ et un opérateur noyau est donné par

$$\begin{aligned} N^1 \left(\varphi\left(x_1, x_2\right)\right) = & e^{-\frac{1}{2}x_3^2} \varphi_{x_1 x_1} dx^1 \\ & + e^{-\frac{1}{2}x_3^2} \left(\varphi_{x_1 x_2} + x_1 \varphi_{x_1} - \varphi\right) dx^2. \end{aligned}$$

On a donc que φ ne dépend que de x_1 et x_2, mais les coefficients de N^1 dépendent de x_3.

Si on fait la comparaison avec l'exemple ci-dessus, on voit que si $dw + a \wedge w = 0$, alors

$$d\left[e^{\frac{1}{2}x_3^2} w\right] + x_1 dx^2 \wedge e^{\frac{1}{2}x_3^2} w = 0,$$

et donc, c'est $e^{\frac{1}{2}x_3^2} w$ qui ne peut dépendre que de x_1 et x_2.

Chapitre 5

Les cas $k = 0, 1, n-1$

Dans ce chapitre, on reprend les résultats établis jusqu'ici dans les cas présentés au début de l'introduction. On verra comment certains résultats s'interprètent et comment on peut en améliorer d'autres.

5.1 Le cas $k = 0$

5.1.1 L'équation $\alpha \wedge u = \beta$

Lorsque $k = 0$, l'équation $\alpha \wedge u = \beta$ se lit $\alpha^{ij} \cdot u = \beta^{ij}$ pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Or, cette équation est beaucoup plus simple que le cas général, et on peut donc améliorer le résultat d'injectivité de la multiplication à gauche par α et celui de régularité d'une solution de l'équation ci dessus comme suit.

Lemme 5.1 (Régularité du diviseur, cas $k = 0$)**.**
Soient $r \geqslant 0$, $\alpha, \beta \in C^r\left(\Omega, \Lambda^l\right)$ tel que $\alpha \neq 0$ et tel qu'il existe $u\colon \Omega \to \Lambda^0$ avec $\alpha \wedge u = \beta$. Alors, ce u est unique et appartient à $C^r\left(\Omega, \Lambda^0\right)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \Omega$ quelconque. Vu que $\alpha\left(x_0\right) \neq 0$, il existe un multi-indice $I \in \mathcal{I}_l$ tel que $\alpha^I\left(x_0\right) \neq 0$. De plus, vu que α est continue, il existe un voisinage V de x_0 tel que α^I ne s'annule pas sur V. D'où, on a

$$u = \beta^I / \alpha^I,$$

sur V, ce qui montre à la fois l'unicité et la régularité. □

5.1.2 Le noyau de l'opérateur

Dans le cas où $k = 0$, on ne peut pas chercher un opérateur noyau de la forme $N^0\colon C^2\left(\Omega, \Lambda^{-1}\right) \to C^1\left(\Omega, \Lambda^0\right)$ car Λ^{-1} n'a pas de sens. Par contre, on peut s'intéresser à l'espace

$$\mathrm{Ker} L_a^0 = \left\{ w \in C^1, \left(\Omega, \Lambda^0\right) \ :\ dw + a \wedge w = 0 \right\}.$$

L'intérêt du théorème suivant est qu'il détermine $\mathrm{Ker} L_a^0$ sans avoir besoin de supposer que le rang de da est constant.

Théorème 5.2 (Noyau de l'opérateur, $k = 0$)**.**
Soit Ω un ouvert connexe et $a \in C^1\left(\Omega, \Lambda^1\right)$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) *Il existe $A \in C^2\left(\Omega, \Lambda^0\right)$ tel que $dA = a$;*

(ii) $\mathrm{Ker} L_a^0 \neq \{0\}$ *;*

(iii) $\mathrm{Ker} L_a^0 \neq \{0\}$ *et pour tout $w \in \mathrm{Ker} L_a^0 \backslash \{0\}$, $w \neq 0$ dans tout Ω ;*

(iv) *Il existe $w \in \mathrm{Ker} L_a^0$ tel que $w \neq 0$ dans tout Ω.*

De plus, si une des conditions ci-dessus est satisfaite, alors,

$$\mathrm{Ker} L_a^0 = \left\{ Ce^{-A} \ : \ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Démonstration. Pour montrer que (i) implique (ii), il suffit de considérer $w = Ce^{-A}$, avec $C \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Le fait que (iii) implique (iv) est trivial, et pour montrer (iv) implique (i) il suffit de considérer $A = -\log |w|$. La partie intéressante de ce théorème est (ii) implique (iii), que nous allons montrer maintenant.

Soit donc $w \in \mathrm{Ker} L_a^0 \backslash \{0\}$ et définissons $\Omega_1 = \{x \in \Omega \ : \ w(x) \neq 0\}$. Par hypothèse, Ω_1 est non vide, et par continuité de w, Ω_1 est ouvert. Montrons que Ω_1 est fermé dans Ω.

Soit $\{x_n\}_{n \geqslant 1} \subset \Omega_1$ et $\overline{x} \in \Omega$ tels que $x_n \to \overline{x}$. Si $\overline{x} \notin \Omega_1$, on a que $\overline{x} \in \partial \Omega_1 \cap \Omega$ et donc $w(\overline{x}) = 0$. Alors, si on définit $A \colon \Omega_1 \to \Lambda^0$ par

$$A(x) = -\log |w(x)|,$$

on a que $\nabla A = dA = a$ sur Ω_1 et que

$$\lim_{n \to \infty} A(x_n) = +\infty.$$

Or ceci est impossible car a, qui est le gradient de A est prolongeable à $\overline{\Omega_1} \cap \Omega$. (Voir lemme A.19 pour les détails.)

On arrive donc à une contradiction et ceci termine la démonstration des équivalences.

Passons à la démonstration du fait que

$$\mathrm{Ker} L_a^0 = \left\{ Ce^{-A} \ : \ C \in \mathbb{R} \right\}$$

sous l'hypothèse qu'il existe A tel que $dA = a$. Si $w = Ce^{-A}$ alors, on vérifie directement que $dw + a \wedge w = 0$. Si maintenant on suppose que $dw + a \wedge w = 0$, alors $d\left(e^A w\right) = 0$. Vu que $e^A w$ est une 0 forme, d est le gradient et Ω est connexe, ceci implique qu'il existe C tel que $e^A w = C$. Ceci est le résultat souhaité et termine la preuve de ce théorème.

□

5.1.3 Existence de solutions

Le théorème suivant a déjà été mentionné dans l'introduction.

Théorème 5.3 ($k = 0$).
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe, $r \geqslant 2$, $a \in C^1(\Omega, \Lambda^0)$ et $f \in C^1(\Omega, \Lambda^1)$. Alors,

(i) toute solution C^1 de

$$\nabla w + a \cdot w = f \tag{5.1}$$

est solution de

$$da \cdot w = df + a \wedge f; \tag{5.2}$$

(ii) le noyau de l'opérateur, i.e. l'ensemble des 0 formes C^1, w, telles que $\nabla w + a \cdot w = 0$ est $\{0\}$ si a ne dérive pas d'un potentiel et est $\left\{Ce^{-A} \ : \ C \in \mathbb{R}\right\}$ si A est un potentiel de a sur Ω.

(iii) si da n'est jamais nul, les solutions de (5.2) sont uniques.

(iv) si $\mathrm{rang}[da] \geqslant 4$, $a \in C^r$ et $f \in C^r$, alors (5.1) et (5.2) sont équivalentes et admettent une unique solution $w \in C^{r+1}$.

Démonstration. Le point (i) est la simple reformulation du même point dans le théorème 3.1. Le point (ii) est le résultat du théorème 5.2. Le point (iii) est une conséquence du lemme 5.1. Pour finir, il nous faut établir le point (iv).

Soit donc w une solution de (5.2). Par le lemme 5.1, un tel w est unique et appartient à C^{r-1}. On déduit, par le même argument que dans le théorème 3.1 que

$$da \wedge (dw + a \wedge w) = da \wedge f.$$

Ainsi, par le théorème 2.2, page 11, vu que $\operatorname{rang}[da] \geqslant 4$, on a que nécessairement

$$\nabla w + aw = f,$$

ce qui montre que w est une solution de (5.1).

Pour établir la régularité de w, il suffit de constater que

$$\nabla w = f - aw.$$

Par construction, le membre de droite est C^{r-1}, et donc, on obtient que w est C^r. En réutilisant la même équation après avoir établi que w est C^r, on obtient que $w \in C^{r+1}$.

Ceci termine la preuve du théorème.

$\square$

Théorème 5.4 (Problème de Dirichlet)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $r \geqslant 2$, $f \in C^r\left(\overline{\Omega}, \Lambda^1\right)$ et $a \in C^r\left(\overline{\Omega}, \Lambda^1\right)$, $w_0 \in C^0\left(\overline{\Omega}, \Lambda^0\right)$ tels que $\operatorname{rang}[da\,(x)] \geqslant 4$ sur $\overline{\Omega}$, il existe v tel que $da \wedge v = df + a \wedge f$ dans Ω et $da \wedge w_0 = df + a \wedge f$ sur $\partial\Omega$. Alors, il existe $w \in C^{r+1}\left(\Omega, \Lambda^0\right) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \Lambda^0\right)$ tel que

$$\begin{cases} dw + a \wedge w = f & \text{dans } \Omega \\ w = w_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Démonstration. Par le théorème 5.3, on a qu'il existe $w \in C^{r+1}\left(\Omega, \Lambda^0\right)$ tel que

$$dw + a \wedge w = f$$

dans Ω. Montrons que pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, $\lim_{x \to x_0} w\,(x) = w_0\,(x_0)$. Soit donc $x_0 \in \partial\Omega$ quelconque. Au vu de notre hypothèse sur le rang de da, on sait que $da\,(x_0) \neq 0$. Ainsi, il existe $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tel que $da\,(x_0)^{ij} \neq 0$. Et par continuité, le résultat est aussi vrai pour tout x suffisamment proche de x_0. Ainsi, on déduit que

$$w_0\,(x_0) = \frac{(df + a \wedge f)^{ij}\,(x_0)}{(da)^{ij}\,(x_0)}.$$

mais également du fait que $da \wedge w = df + a \wedge f$,

$$w = \frac{(df + a \wedge f)^{ij}}{(da)^{ij}},$$

proche de x_0. Ainsi, vu que $a, f \in C^r$ jusqu'au bord, on déduit que

$$\lim_{x \to x_0} w\,(x) = \frac{(df + a \wedge f)^{ij}\,(x_0)}{(da)^{ij}\,(x_0)} = w_0\,(x_0)$$

qui est le résultat voulu. $\square$

On va maintenant passer à un exemple où aucun de nos théorèmes s'applique, mais où on aura quand même un critère d'existence de solution globale.

Exemple 5.5.
Lorsque a dérive d'un potentiel, l'existence est donnée par le lemme de Poincaré. Dans le cas où a ne dérive pas d'un potentiel, mais que $da = 0$, on n'a pas encore de condition suffisante pour l'existence d'une solution. Néanmoins, on présente ici un exemple où da est nul, mais a ne dérive pas d'un potentiel, et où la condition $df + a \wedge f = 0$ est suffisante pour l'existence d'une solution de notre problème. Soient $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $\tilde{\Omega} = \Omega \backslash [\mathbb{R}_- \times \{0\}]$, $a\colon \Omega \to \Lambda^1$ définie par

$$a(x) = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx^1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx^2$$

et $A\colon \tilde{\Omega} \to \Lambda^0$ définie par

$$A(x) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) & \text{si } x_2 > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x_2 = 0 \\ -\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) - \pi & \text{si } x_2 < 0 \end{cases}$$

Remarquons que $dA = a$ sur $\tilde{\Omega}$ et, pour $x_1 < 0$

$$\lim_{x_2 \overset{>}{\to} 0} A(x_1, x_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x_2 \overset{<}{\to} 0} A(x_1, x_2) = -\frac{3\pi}{2}.$$

Soit maintenant $f \in C^1(\Omega, \Lambda^1)$ tel que $df + a \wedge f = 0$. Alors, on a que $d\left(e^A f\right) = 0$ sur $\tilde{\Omega}$. Et, vu que $\tilde{\Omega}$ est simplement connexe, il existe $g \in C^2\left(\tilde{\Omega}, \Lambda^0\right)$ tel que $dg = e^A f$ sur $\tilde{\Omega}$.

Considérons pour commencer les restrictions

$$g^+ = g|_{\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x_1<0, x_2>0\}}$$

$$g^- = g|_{\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x_1<0, x_2<0\}}$$

Alors, vu que $\nabla g^+ = e^A f$ et $\nabla g^- = e^A f$ se prolongent continûment à $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1 < 0, x_2 \geqslant 0\right\}$ et $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1 < 0, x_2 \leqslant 0\right\}$ respectivement, il en est de même pour g^+ et g^-. De plus, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[g^+(x_1, 0)\right] = \lim_{x_2 \overset{>}{\to} 0} e^{A(x_1,x_2)} f^1(x_1, x_2) = e^{\pi/2} f^1(x_1, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[g^-(x_1, 0)\right] = \lim_{x_2 \overset{<}{\to} 0} e^{A(x_1,x_2)} f^1(x_1, x_2) = e^{-3\pi/2} f^1(x_1, 0).$$

Définissons maintenant pour $x_1 < 0$,

$$C(x_1) = \frac{e^{-3\pi/2} g^+(x_1, 0) - e^{\pi/2} g^-(x_1, 0)}{e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}}.$$

Alors,

$$C'(x_1) = \frac{e^{-3\pi/2} e^{\pi/2} f^1(x_1, 0) - e^{\pi/2} e^{-3\pi/2} f^1(x_1, 0)}{e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}} = 0,$$

d'où, C est en réalité une constante. Définissons pour finir $w\colon \Omega \to \Lambda^0$ par

$$w(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-A(x_1,x_2)}\left(g(x_1, x_2) + C\right) & \text{si } (x_1, x_2) \in \tilde{\Omega} \\ \frac{g^+(x_1,0) - g^-(x_1,0)}{e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}} & \text{si } x_1 < 0 \text{ et } x_2 = 0. \end{cases}$$

On a que

$$dw + a \wedge w = f$$

sur $\tilde{\Omega}$. Il nous reste donc à montrer que w est une solution en $(x_1, 0)$ pour tout $x_1 < 0$. Soit donc $x_1 < 0$ quelconque. Alors,

$$\begin{aligned}\lim_{x_2 \overset{>}{\to} 0} w(x_1, x_2) =& e^{-\pi/2}\left(g^+(x_1,0) + \frac{e^{-3\pi/2} g^+(x_1,0) - e^{\pi/2} g^-(x_1,0)}{e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}}\right) \\ =& \frac{g^+(x_1,0) - g^-(x_1,0)}{e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}} = w(x_1, 0)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{x_2 \overset{<}{\to} 0} w(x_1, x_2) =& e^{3\pi/2}\left(g^-(x_1,0) + \frac{e^{-3\pi/2} g^+(x_1,0) - e^{\pi/2} g^-(x_1,0)}{e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}}\right) \\ =& \frac{g^+(x_1,0) - g^-(x_1,0)}{e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}} = w(x_1, 0).\end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème des accroissements finis, il existe $\theta_h \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned}\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{w(x_1,h) - w(x_1,0)}{h} &= \lim_{h \overset{>}{\to} 0} w_{x_2}(x_1, \theta_h h) \\ &= \lim_{h \overset{>}{\to} 0} f^2(x_1, \theta_h h) - a^2(x_1, \theta_h h)\, w(x_1, \theta_h h) \\ &= f^2(x_1, 0) - a^2(x_1, 0)\, w(x_1, 0).\end{aligned}$$

De plus par les mêmes arguments, on a

$$\lim_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{w(x_1,h) - w(x_1,0)}{h} = f^2(x_1, 0) - a^2(x_1, 0)\, w(x_1, 0).$$

Pour finir, vu que $a^1(x_1, 0) = 0$, on a que

$$\begin{aligned}w_{x_1}(x_1,0) + a^1(x_1,0)\, w(x_1,0) =& w_{x_1}(x_1,0) \\ =& \frac{e^{\pi/2} f^1(x_1,0) - e^{-3\pi/2} f^1(x_1,0)}{e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}} = f^1(x_1,0).\end{aligned}$$

On a donc bien montré que

$$dw + a \wedge w = f$$

sur Ω, qui était le résultat voulu.

5.2 Le cas $k = 1$

5.2.1 Existence de solutions

Le théorème suivant a déjà été mentionné dans l'introduction.

Théorème 5.6 ($k = 1$)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $r \geqslant 1$ un entier, $a \in C^1(\Omega, \Lambda^1)$ et $f \in C^1(\Omega, \Lambda^2)$. Alors

(i) toute solution de

$$dw + a \wedge w = f \tag{5.3}$$

est solution de

$$da \wedge w = df + a \wedge f; \tag{5.4}$$

(ii) *si* $\operatorname{rang}[da] \geqslant 4$, (5.3) *et* (5.4) *ont au plus une solution.*

(iii) *si* $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \geqslant 6$, $a \in C^{r+2}$ *et* $f \in C^{r+1}$, *alors* (5.3) *et* (5.4) *sont équivalentes et admettent une unique solution* $w \in C^r$.

(iv) *si* $u \in C^2(\Omega, \Lambda^0)$ *est une solution de*

$$da \wedge u = f, \tag{5.5}$$

alors $w = \nabla u + a \cdot u$ *est une solution de* (5.3).

(v) *si* $n = 2$, $da \neq 0$ *dans* Ω, $a \in C^{r+2}$ *et* $f \in C^{r+1}$, (5.3) *admet toujours une solution.*

Démonstration. Les points (i) à (iv) sont les reformulations des mêmes points dans le théorème 3.1. Pour montrer le point (v), on utilise les mêmes arguments que dans le théorème 3.1, sauf qu'on utilise le lemme 5.1 pour établir la régularité d'une solution de

$$da \wedge u = f.$$

On peut également voir le point (v) comme un cas particulier de $k = n-1$, et donc, d se comporte comme la divergence. □

Ce théorème, combiné à la remarque 1.3 nous donne un critère d'existence dès que $\operatorname{rang}[da] \geqslant 4$. On va donc voir un exemple qui nous donne un critère d'existence dans le cas où $\operatorname{rang}[da] \equiv 2$.

Proposition 5.7 (Problème modèle $\operatorname{rang}[da] = 2$)**.**
Soit $a = x_1 dx^2$, $w = \sum_{i=1}^n w^i dx^i$, $f = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} f^{ij} dx^i \wedge dx^j \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda^2)$ *tels que pour tout* x, *il existe* $v \in \Lambda^0$ *tel que* $da(x) \wedge v = (df + a \wedge f)(x)$ *; ce qui est équivalent dans ce cas à ce que pour tout* $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ *avec* $(i, j) \neq (1, 2)$,

$$f^{jk}_{x_i} - f^{ik}_{x_j} + f^{ij}_{x_k} + a^i f^{jk} - a^j f^{ik} + a^k f^{ij} = 0, \tag{5.6}$$

ou encore

$$f^{ij}_{x_1} - f^{1j}_{x_i} + f^{1i}_{x_j} = 0 \quad \textit{pour tout } 3 \leqslant i < j \leqslant n \tag{5.7}$$

$$f^{ij}_{x_2} - f^{2j}_{x_i} + f^{2i}_{x_j} + x_1 f^{ij} = 0 \quad \textit{pour tout } 3 \leqslant i < j \leqslant n \tag{5.8}$$

$$f^{jk}_{x_i} - f^{ik}_{x_j} + f^{ij}_{x_k} = 0 \quad \textit{pour tout } 3 \leqslant i < j < k \leqslant n. \tag{5.9}$$

Alors, le problème $dw + a \wedge w = f$ *admet une solution* $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda^1)$ *tel que pour tout* $i \geqslant 3$,

$$w^i = f^{2i}_{x_1} - f^{1i}_{x_2} + f^{12}_{x_i} - x_1 f^{1i}. \tag{5.10}$$

De plus, toute solution du problème $dw + a \wedge w = f$ *vérifie* (5.10).

Démonstration. Soit $c \in \mathbb{R}^n$ quelconque. On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 2$, l'hypothèse (5.6) est vide et il faut montrer que le problème

$$w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1 = f^{12}$$

admet une solution. Il existe plusieurs façons de résoudre ce problème. Par exemple, on peut prendre

$$\begin{aligned} &w^1 = 0 \\ &w^2 = \int_{c_1}^{x_1} f^{12}(t_1, x_2)\, dt_1 + K(x_2). \end{aligned}$$

Ou encore,

$$\begin{aligned} &w^2 = 0 \\ &w^1 = e^{-x_1 x_2} \int_{c_2}^{x_2} e^{x_1 t_2} f^{12}(x_1, t_2)\, dt_2 + K(x_1)\, e^{-x_1 x_2}. \end{aligned}$$

Passons maintenant au pas de récurrence. C'est-à-dire, on suppose que le résultat est vrai en dimension plus petite ou égale à $n-1$ et on montre que le résultat est vrai en dimension n. On doit alors trouver une solution de

$$\begin{aligned} w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1 =& f^{12} \\ w^i_{x_1} - w^1_{x_i} =& f^{1i} \\ w^i_{x_2} - w^2_{x_i} + x_1 w^i =& f^{2i} \end{aligned}$$

pour tout $3 \leqslant i \leqslant n$.

En accord, avec (5.10), commençons par définir

$$w^i = f^{2i}_{x_1} - f^{1i}_{x_2} + f^{12}_{x_i} - x_1 f^{1i}$$

pour tout $3 \leqslant i \leqslant n$. Alors, pour tout $3 \leqslant i < j \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned} w^j_{x_i} - w^i_{x_j} + a^i w^j - a^j w^i =& w^j_{x_i} - w^i_{x_j} \\ =& f^{2j}_{x_1 x_i} - f^{1j}_{x_2 x_i} + f^{12}_{x_i x_j} - x_1 f^{1j}_{x_i} \\ & - \left(f^{2i}_{x_1 x_j} - f^{1i}_{x_2 x_j} + f^{12}_{x_i x_j} - x_1 f^{1i}_{x_j} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{\left[f^{2j}_{x_i} - f^{2i}_{x_j} \right]}_{\overset{(5.8)}{=} f^{ij}_{x_2} + x_1 f^{ij}} + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \right) \underbrace{\left[f^{1i}_{x_j} - f^{1j}_{x_i} \right]}_{\overset{(5.7)}{=} -f^{ij}_{x_1}} \\ =& f^{ij}_{x_1 x_2} + x_1 f^{ij}_{x_1} + f^{ij} - f^{ij}_{x_1 x_2} - x_1 f^{ij}_{x_1} = f^{ij}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Ainsi, on a déjà $w^j_{x_i} - w^i_{x_j} + a^i w^j - a^j w^i = f^{ij}$ pour $3 \leqslant i < j \leqslant n$.

Par convention, on note maintenant pour $g = g(x)$,

$$\int_{c_i}^{x_i} g dt_i = \int_{c_i}^{x_i} g(x_1, ..., x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, ..., x_n) dt_i.$$

L'idée est de définir

$$\begin{aligned} w^1 =& \alpha^1 (x_1, ..., x_{n-1}) + \int_{c_n}^{x_n} \left(w^n_{x_1} - f^{1n} \right) dt_n \\ w^2 =& \alpha^2 (x_1, ..., x_{n-1}) + \int_{c_n}^{x_n} \left(w^n_{x_2} + x_1 w^n - f^{2n} \right) dt_n, \end{aligned}$$

et de construire (α^1, α^2) en utilisant notre hypothèse de récurrence.

À cette fin, on définit pour $3 \leqslant i \leqslant n-1$

$$A^1_i = \int_{c_n}^{x_n} \left(w^n_{x_1} - f^{1n} \right) dt_n - \int_{c_i}^{x_i} \left(w^i_{x_1} - f^{1i} \right) dt_i$$

$$A^2_i = \int_{c_n}^{x_n} \left(w^n_{x_2} + x_1 w^n - f^{2n} \right) dt_n - \int_{c_i}^{x_i} \left(w^i_{x_2} + x_1 w^i - f^{2i} \right) dt_i$$

Montrons maintenant que $(A^1_i)_{x_i}$ et $(A^2_i)_{x_i}$ sont des fonctions de $x_1, ..., x_{n-1}$ et ne dépendent pas de x_n. On a

$$\left(A^1_i \right)_{x_i} = \int_{c_n}^{x_n} \Big(\underbrace{w^n_{x_1 x_i}}_{\overset{(5.11)}{=} w^i_{x_1 x_n} + f^{in}_{x_1}} - f^{1n}_{x_i} \Big) dt_n - w^i_{x_1} + f^{1i}$$

$$= \int_{c_n}^{x_n} \Big(w^i_{x_1 x_n} + \underbrace{f^{in}_{x_1} - f^{1n}_{x_i}}_{\overset{(5.7)}{=} -f^{1i}_{x_n}} \Big) dt_n - w^i_{x_1} + f^{1i}$$

$$= -\left(w^i_{x_1} - f^{1i} \right) \Big|_{x_n = c_n}, \tag{5.12}$$

qui ne dépend pas de x_n. Passons à $\left(A^2_i\right)_{x_i}$.

$$\left(A^2_i\right)_{x_i} = \int_{c_n}^{x_n} \Big(\underbrace{w^n_{x_2 x_i}}_{\overset{(5.11)}{=} w^i_{x_2 x_n} + f^{in}_{x_2}} + \underbrace{x_1 w^n_{x_i}}_{\overset{(5.11)}{=} x_1 w^i_{x_n} + x_1 f^{in}} - f^{2n}_{x_i} \Big) dt_n - w^i_{x_2} - x_1 w^i + f^{2i}$$

$$= \int_{c_n}^{x_n} \Big(w^i_{x_2 x_n} + x_1 w^n_{x_i} + \underbrace{f^{in}_{x_2} - f^{2n}_{x_i} + x_1 f^{in}}_{\overset{(5.8)}{=} -f^{2i}_{x_n}} \Big) dt_n - w^i_{x_2} - x_1 w^i + f^{2i}$$

$$= -\left(w^i_{x_2} + x_1 w^i - f^{2i} \right) \Big|_{x_n = c_n}, \tag{5.13}$$

qui ne dépend pas de x_n.

On s'intéresse maintenant à trouver une fonction $\alpha = \left(\alpha^1, \alpha^2\right)(x_1, ..., x_{n-1})$, telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \alpha^2_{x_1} - \alpha^1_{x_2} - x_1 \alpha^1 & = & f^{12}\,\big|_{x_n = c_n} & \\ \alpha^1_{x_i} & = & -\left(A^1_i\right)_{x_i} & \text{pour } 3 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \alpha^2_{x_i} & = & -\left(A^2_i\right)_{x_i} & \text{pour } 3 \leqslant i \leqslant n-1. \end{array} \right. \tag{5.14}$$

Pour ce faire,on résout $d\alpha + a \wedge \alpha = \tilde{f}$, à l'aide de notre hypothèse de récurrence, pour $\tilde{f}$ bien choisi. Plus précisément, on veut trouver $\alpha \in \Lambda^1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcllll} \alpha^2_{x_1} - \alpha^1_{x_2} - x_1 \alpha^1 & = & f^{12}\,\big|_{x_n = c_n} & := & \tilde{f}^{12} & \\ \alpha^i_{x_1} - \alpha^1_{x_i} & = & \left(A^1_i\right)_{x_i} & := & \tilde{f}^{1i} & \text{pour } 3 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \alpha^i_{x_2} - \alpha^2_{x_i} & = & \left(A^2_i\right)_{x_i} & := & \tilde{f}^{2i} & \text{pour } 3 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \alpha^j_{x_i} - \alpha^i_{x_j} & = & 0 & := & \tilde{f}^{ij} & \text{pour } 3 \leqslant i < j \leqslant n-1. \end{array} \right. \tag{5.15}$$

On va donc vérifier que le problème (5.15) vérifie les hypothèses de notre proposition. Si $1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1$ est tel que $(i,j) \neq (1,2)$, on a trois cas : Soit $i = 1$ et $3 \leqslant j < k \leqslant n-1$, soit $i = 2$ et $3 \leqslant j < k \leqslant n-1$, soit $3 \leqslant i < j < k \leqslant n-1$. Si $i = 1$ et $3 \leqslant j < k \leqslant n-1$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{jk}_{x_i} - \tilde{f}^{ik}_{x_j} + \tilde{f}^{ij}_{x_k} + a^i \tilde{f}^{jk} - a^j \tilde{f}^{ik} + a^k \tilde{f}^{ij} &= \left(A^1_j\right)_{x_j x_k} - \left(A^1_k\right)_{x_j x_k} \\ &\overset{(5.12)}{=} -\left(w^j_{x_1 x_k} - f^{1j}_{x_k} \right) \Big|_{x_n = c_n} + \left(w^k_{x_1 x_j} - f^{1k}_{x_j} \right) \Big|_{x_n = c_n} \\ &\overset{(5.11)}{=} \left[f^{jk}_{x_1} - f^{1k}_{x_j} + f^{1j}_{x_k} \right]_{x_n = c_n} \overset{(5.7)}{=} 0, \end{aligned}$$

Si maintenant $i = 2$ et $3 \leqslant j < k \leqslant n-1$, on a

$$\begin{aligned} &\tilde{f}^{jk}_{x_i} - \tilde{f}^{ik}_{x_j} + \tilde{f}^{ij}_{x_k} + a^i \tilde{f}^{jk} - a^j \tilde{f}^{ik} + a^k \tilde{f}^{ij} \\ &\qquad = \left(A^2_j\right)_{x_j x_k} - \left(A^2_k\right)_{x_j x_k} \\ &\qquad \overset{(5.13)}{=} -\left(w^j_{x_2 x_k} + x_1 w^j_{x_k} - f^{2j}_{x_k} \right) \Big|_{x_n = c_n} + \left(w^k_{x_2 x_j} + x_1 w^k_{x_j} - f^{2k}_{x_j} \right) \Big|_{x_n = c_n} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\right)\Big[\underbrace{w^k_{x_j} - w^j_{x_k}}_{\overset{(5.11)}{=} f^{jk}}\Big]_{x_n=c_n} + \left(-f^{2k}_{x_j} + f^{2j}_{x_k}\right)\Big|_{x_n=c_n} \overset{(5.8)}{=} 0.$$

Si, pour finir, $3 \leqslant i < j < k \leqslant n-1$, on a

$$\tilde{f}^{jk}_{x_i} - \tilde{f}^{ik}_{x_j} + \tilde{f}^{ij}_{x_k} + a^i \tilde{f}^{jk} - a^j \tilde{f}^{ik} + a^k \tilde{f}^{ij} = 0$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe α une solution de (5.15) tel que pour tout $3 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$\alpha^i = \tilde{f}^{2i}_{x_1} - \tilde{f}^{1i}_{x_2} + \tilde{f}^{12}_{x_i} - x_1 \tilde{f}^{1i}.$$

Dans notre cas, pour $3 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$\begin{aligned}
\alpha^i &= \left(A^2_i\right)_{x_1x_i} - \left(A^1_i\right)_{x_2x_i} + f^{12}_{x_i}\Big|_{x_n=c_n} - x_1\left(A^1_i\right)_{x_i} \\
&\overset{(5.12)\&(5.13)}{=} \left[-\left(w^i_{x_1x_2} + x_1 w^i_{x_1} + w^i - f^{2i}_{x_i}\right) + \left(w^i_{x_1x_2} - f^{1i}_{x_2}\right) + f^{12}_{x_i} + x_1\left(w^i_{x_1} - f^{1i}\right)\right]_{x_n=c_n} \\
&= \left[f^{2i}_{x_i} - f^{1i}_{x_2} + f^{12}_{x_i} - x_1 f^{1i} - w^i\right]_{x_n=c_n} \overset{(5.10)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Donc, les seules composantes de α qui sont non nulles sont α^1 et α^2. De plus, on a alors que $\alpha = \left(\alpha^1, \alpha^2\right)(x_1, ..., x_{n-1})$ est une solution du système (5.14).

Nous pouvons maintenant définir w^1 et w^2, de la façon suivante

$$\begin{aligned}
w^1 &:= \int_{c_n}^{x_n} \left(w^n_{x_1} - f^{1n}\right) dt_n + \alpha^1 \\
w^2 &:= \int_{c_n}^{x_n} \left(w^n_{x_2} + x_1 w^n - f^{2n}\right) dt_n + \alpha^2.
\end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $3 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$\begin{aligned}
w^1 &= \int_{c_n}^{x_n} \left(w^n_{x_1} - f^{1n}\right) dt_n + \int_{c_i}^{x_i} \alpha^1_{x_i} + \alpha^1\Big|_{x_i=c_i} \\
&\overset{(5.14)}{=} \int_{c_n}^{x_n} \left(w^n_{x_1} - f^{1n}\right) dt_n - \int_{c_i}^{x_i} \left(A^1_i\right)_{x_i} dt_i + \alpha^1\Big|_{x_i=c_i} \\
&= \int_{c_n}^{x_n} \left(w^n_{x_1} - f^{1n}\right) dt_n - A^1_i + \left[A^1_i + \alpha^1\right]_{x_i=c_i} \\
&= \int_{c_n}^{x_n} \left(w^n_{x_1} - f^{1n}\right) dt_n - \int_{c_n}^{x_n} \left(w^n_{x_1} - f^{1n}\right) dt_n + \int_{c_i}^{x_i} \left(w^i_{x_1} - f^{1i}\right) dt_i + \left[A^1_i + \alpha^1\right]_{x_i=c_i} \\
&= \int_{c_i}^{x_i} \left(w^i_{x_1} - f^{1i}\right) dt_i + \left[A^1_i + \alpha^1\right]_{x_i=c_i} \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

Et par les mêmes arguments, on a,

$$w^2 = \int_{c_i}^{x_i} \left(w^i_{x_2} + x_1 w^i - f^{2i}\right) dt_i + \left[A^2_i + \alpha^2\right]_{x_i=c_i}. \qquad (5.17)$$

Voyons que w ainsi définit est une solution de notre système. On a

$$\begin{aligned}
w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1 = \int_{c_n}^{x_n} \Big[\, & w^n_{x_1x_2} + x_1 w^n_{x_1} + w^n - f^{2n}_{x_1} \\
& - \left(w^n_{x_1x_2} - f^{1n}_{x_2} + x_1 w^n_{x_1} - x_1 f^{1n}\right)\Big]\, dt_n \\
& + \alpha^2_{x_1} - \alpha^1_{x_2} - x_1 \alpha_1
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(5.14)}{=} \int_{c_n}^{x_n} \Big(\underbrace{w^n - f^{2n}_{x_1} + f^{1n}_{x_2} + x_1 f^{1n}}_{\stackrel{(5.10)}{=} f^{12}_{x_n}} \Big)\, dt_n + f^{12} \Big|_{x_n = c_n} = f^{12}.$$

On a également pour tout $3 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$\begin{aligned} w^i_{x_1} - w^1_{x_i} &\stackrel{(5.16)}{=} w^i_{x_1} - \left(w^i_{x_1} - f^{1i}\right) = f^{1i} \\ w^i_{x_2} - w^2_{x_i} + x_1 w^i &\stackrel{(5.17)}{=} w^i_{x_2} + x_1 w^i - \left(w^i_{x_2} + x_1 w^i - f^{2i}\right) = f^{2i}. \end{aligned}$$

Pour finir, dû au fait que α ne dépend pas de x_n, on a

$$\begin{aligned} w^n_{x_1} - w^1_{x_n} &= w^n_{x_1} - \left(w^n_{x_1} - f^{1n}\right) = f^{1n} \\ w^n_{x_2} - w^2_{x_n} + x_1 w^n &= w^n_{x_2} + x_1 w^n - \left(w^n_{x_2} + x_1 w^n - f^{2n}\right) = f^{2n}. \end{aligned}$$

Ainsi, w est une solution de notre problème.

Pour terminer la preuve du théorème, il faut voir que toutes les solutions de notre problème vérifient (5.10). Or, ceci est une conséquence directe du fait que si $dw + a \wedge w = f$ alors $da \wedge w = df + a \wedge f$. □

5.2.2 L'opérateur noyau

On ne peut pas, dans ce cas là, appliquer le théorème 4.1, car la condition $1 \leqslant m \leqslant k-1 = 0$ ne peut jamais être remplie. On doit donc recommencer notre analyse depuis le début.

On a par le théorème 3.1 que si le rang de da est plus grand ou égal à 4, les solutions de notre équation sont uniques. Si le rang de da est égal à 2, les solutions ne sont plus uniques. En effet, si on a $a = x_1 dx^2$ et $w = x_2 dx_2$, on a que $dw + a \wedge w = 0$, malgré le fait que $w \neq 0$. Or, dans ce cas là, notre construction standard pour l'opérateur noyau, qui consiste à composer L^0_a et la projection orthogonale sur l'anihilateur de da nous renvoie un opérateur qui envoie toujours tout sur 0. En effet, si le rang de da est 2, l'unique 0-forme u telle que $da \wedge u = 0$ est $u = 0$. Néanmoins, on sait que l'opérateur a un noyau non trivial. Comme le montre la proposition suivante, dans le cas où $a = x_1 dx^2$, il n'existe pas d'opérateur noyau d'ordre 1, mais il en existe un d'ordre 2 surjectif.

Proposition 5.8.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a = x_1 dx^2$. Alors, il n'existe pas d'opérateur noyau d'ordre 1 $N^1 \colon C^r\left(\Omega, \Lambda^0\right) \to \mathrm{Ker} L^1_a$ autre que l'opérateur qui envoie tout sur 0. C'est à dire, si $N^1 \colon C^r\left(\Omega, \Lambda^0\right) \to C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^1\right)$ est tel que

(i) N^1 est un opérateur différentiel d'ordre 1 ;

(ii) $L^1_a \circ N^1 \equiv 0$ dans $C^r\left(\Omega, \Lambda^0\right)$,

alors $N^1(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in C^r\left(\Omega, \Lambda^0\right)$.

De plus, il existe un opérateur noyau d'ordre 2 surjectif donné par

$$N^1\left(\varphi\left(x_1, x_2\right)\right) = \varphi_{x_1 x_1} dx^1 + \left(\varphi_{x_1 x_2} + x_1 \varphi_{x_1} - \varphi\right) dx^2.$$

Démonstration. On commence la preuve par décrire le noyau $\mathrm{Ker} L^1_a$. Soit $w \in \mathrm{Ker} L^1_a$. Nécessairement, on a

$$da \wedge w = 0,$$

ce qui est équivalent à $w^3 = w^4 = \ldots = w^n = 0$. Ainsi, $dw + a \wedge w = 0$ devient équivalent à

$$0 = \left(w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1\right) dx^1 \wedge dx^2 + \sum_{i=3}^{n} \left(-w^1_{x_i}\right) dx^1 \wedge dx^i + \sum_{i=3}^{n} \left(-w^2_{x_i}\right) dx^2 \wedge dx^i.$$

On en déduit donc que $w \in \mathrm{Ker}L_a^1$ si et seulement si $w = w^1(x_1, x_2)\, dx^1 + w^2(x_1, x_2)\, dx^2$ et $w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1 = 0$. On cherche donc un opérateur noyau de la forme $N^1(\varphi(x_1, x_2))$. Commençons par montrer que l'unique opérateur noyau d'ordre 1 est l'opérateur trivial qui envoie tout sur 0.

Si on pose

$$\begin{aligned} N^1(\varphi(x_1, x_2)) = & \left(\beta^1_1 \varphi_{x_1} + \beta^1_2 \varphi_{x_2} + \gamma^1 \varphi\right) dx^1 \\ & + \left(\beta^2_1 \varphi_{x_1} + \beta^2_2 \varphi_{x_2} + \gamma^2 \varphi\right) dx^2, \end{aligned}$$

et qu'on teste successivement cet opérateur en remplaçant φ par 1, x_1, x_2, x_1^2, $x_1 x_2$ et x_2^2, on obtient que nécessairement tous les coefficients sont nuls.

D'un autre côté, si on définit, pour $\varphi \in C^\infty$,

$$N^1(\varphi(x_1, x_2)) = \varphi_{x_1 x_1} dx^1 + (\varphi_{x_1 x_2} + x_1 \varphi_{x_1} - \varphi)\, dx^2,$$

on a $L_a^1 \circ N^1 = 0$. De plus, si $w \in C^\infty \cap \mathrm{Ker}L_a^1$, par le théorème A.14, il existe $\alpha \in C^\infty$, une solution de

$$\alpha_{x_1 x_1} = w^1.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}\left[w^2 - \alpha_{x_1 x_2} - x_1 \alpha_{x_1} + \alpha\right] = & w^2_{x_1} - \alpha_{x_1 x_1 x_2} - \alpha_{x_1} - x_1 \alpha_{x_1 x_1} + \alpha_{x_1} \\ = & w^2_{x_1} - w^1_{x_2} - x_1 w^1 = 0. \end{aligned}$$

Soit donc $\psi = \psi(x_2) = w^2 - \alpha_{x_1 x_2} - x_1 \alpha_{x_1} + \alpha$, et définissons

$$\varphi = \alpha - \psi.$$

Alors

$$\varphi_{x_1 x_1} = w^1,$$

et

$$\varphi_{x_1 x_2} + x_1 \varphi_{x_1} - \varphi = \alpha_{x_1 x_2} + x_1 \alpha_{x_1} - \varphi + \psi = w^2.$$

D'où, on a que

$$N^1(\varphi) = w,$$

et N^1 est donc surjectif.

□

Remarque 5.9.
On peut généraliser ce résultat en un résultat local pour toutes les formes a telles que rang$[da] = 2$. En effet, si a est quelconque mais avec rang$[da] = 2$, alors, on invoque le théorème de Darboux pour les 1 formes (voir [7, théorème 13.6, page 271]), pour trouver un difféomorphisme définit localement tel que $\varphi^*(a) = x_1 dx^2 + dS$. Si N^1 est l'opérateur noyau donné par la proposition ci-dessus, on a que

$$\tilde{N}^1(\psi) = \left(\varphi^{-1}\right)^* \left(e^S N^1(\varphi^*(\psi))\right)$$

est un opérateur noyau pour L_a^1.

5.3 Le cas $k = n - 1$

Dans ce cas là, l'opérateur d peut s'interpréter comme la divergence et $a \wedge w$ comme $\langle a, w\rangle$, après quelques changements de signe sur les composantes de w. Les résultats d'existence pour ce cas là ont déjà été étudié avec plus de détails dans [3] et [6]. Néanmoins, on a des résultats différents pour l'opérateur noyau.

5.3.1 Existence de solutions

Le théorème suivant a déjà été mentionné dans l'introduction.

Théorème 5.10 ($k = n-1$)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Alors,

(i) si $a \in C^1(\Omega, \Lambda^1)$, $f \in C^0(\Omega, \Lambda^n)$ et $u \in C^1(\Omega, \Lambda^{n-2})$ est tel que $du \in C^1$ et

$$da \wedge u = f,$$

alors $w = du + a \wedge u$ est une solution de

$$dw + a \wedge w = f; \tag{5.18}$$

(ii) si $r \geqslant 1$, $a \in C^{r+3}$, $f \in C^{r+1}$ et $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m \neq 0$, (5.18) *admet toujours une solution $w \in C^r$.*

Ce théorème est une simple reformulation du théorème 3.1.

5.3.2 Le noyau de l'opérateur

Dans [6], l'existence, la surjectivité et la régularité d'un opérateur noyau d'ordre 2 est discutée. Dans notre cas, on a l'existence et la surjectivité d'un opérateur noyau d'ordre 1. En effet, en combinant les théorèmes 4.1 et la proposition 4.6, on a que, sous l'hypothèse que le rang de da est constant et plus grand ou égal à 2, l'opérateur noyau donné par $N^{n-1} = L_a^{n-2} \circ \pi_{n-2}$ est surjectif, au moins localement.

L'avantage de notre opérateur est qu'il paraît plus naturel d'avoir un opérateur noyau d'ordre 1 lorsque l'opérateur lui même est d'ordre 1. Néanmoins, il paraît avoir de moins bonnes propriétés que celui d'ordre 2 donné par [6]. On a la surjectivité sur le bord avec régularité optimale [6, Theorem 17], alors que dans notre cas, on n'a toujours pas répondu à la question de savoir sous quelles conditions on a la surjectivité de l'opérateur noyau sur le bord.

Théorème 5.11.
Soient $r \geqslant 2$, $1 \leqslant m \leqslant n-2$ $a \in C^{r+1}(\Omega, \Lambda^1)$ tel que $\operatorname{rang}[da] \equiv 2m$ *sur Ω et $\pi_{n-2} \colon \Lambda^{n-2} \to$* $\operatorname{Anh}_{n-2}(da)$ *la projection orthogonale. Alors,*

$$N^{n-1} := L_a^{n-2} \circ \pi_{n-2} \colon C^r\left(\Omega, \Lambda^{n-2}\right) \to C^{r-1}\left(\Omega, \Lambda^{n-1}\right)$$

est un opérateur noyau.

De plus,

(i) si $r \geqslant 4$, $w \in C^r(\Omega, \Lambda^{n-1})$ est tel que $dw + a \wedge w = 0$ et que $x_0 \in \Omega$, il existe U un voisinage de x_0 et $\xi \in C^{r-2}(U, \Lambda^{n-2})$ tel que

$$N^{n-1}(\xi) = w$$

sur U ;

(ii) si $m \geqslant 2$, $r \geqslant 4$ et que $w \in C^r(\Omega, \Lambda^{n-1})$ est tel que $dw + a \wedge w = 0$, il existe $\xi \in C^{r-2}(\Omega, \Lambda^{n-2})$ tel que

$$N^{n-1}(\xi) = w$$

sur Ω.

La preuve de ce théorème est une combinaison du théorème 4.1 et de la proposition 4.6.

De plus, on peut se poser la question, est-ce que tous les opérateurs noyau d'ordre 1 sont donnés par l'opérateur qu'on a construit ci-dessus. On va voir dans un cas qu'il existe un opérateur noyau d'ordre 1 surjectif si et seulement si l'opérateur ci-dessus est surjectif.

Exemple 5.12.
Soient $n = 3$, $k = 2$ et $a = x_1 dx^2$. Un opérateur différentiel linéaire et d'ordre 1 est donné par

$$N(\varphi) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} \sum_{t=1}^{3} \left(\alpha_1^{ij,t} \varphi_{x_1}^t + \alpha_2^{ij,t} \varphi_{x_2}^t + \alpha_3^{ij,t} \varphi_{x_3}^t + \beta^{ij,t} \varphi^t \right) dx^i \wedge dx^j.$$

En testant successivement avec $\varphi = dx^t$, $\varphi = x_r dx^t$ et $\varphi = x_s x_r dx^t$ et en demandant que $L_a^2 N(\varphi) = 0$, on arrive au fait que nécessairement

$$\begin{aligned} N(\varphi) = \sum_{t=1}^{3} \Bigg\{ & \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left[-\alpha_3^{23,t} \varphi^t \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[-\alpha_3^{13,t} \varphi^t \right] - x_1 \left[-\alpha_3^{13,t} \varphi^t \right] \right) dx^1 \wedge dx^2 \\ & - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[-\alpha_3^{13,t} \varphi^t \right] dx^1 \wedge dx^3 \\ & - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[-\alpha_3^{23,t} \varphi^t \right] dx^2 \wedge dx^3 \Bigg\}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, l'opérateur noyau que nous donne notre construction est

$$\overline{N}(\varphi) = \left(\varphi_{x_1}^2 - \varphi_{x_2}^1 - x_1 \varphi^1 \right) dx^1 \wedge dx^2 - \varphi_{x_3}^1 dx^1 \wedge dx^3 - \varphi_{x_3}^2 dx^2 \wedge dx^3.$$

Voyons maintenant que $\overline{N}$ est surjectif si et seulement si il existe des coefficients $\{\alpha_3^{13,t}\}_{t=1,2,3}$ et $\{\alpha_3^{23,t}\}_{t=1,2,3}$ tel que N est surjectif.

En effet, si $\overline{N}$ est surjectif, alors, on peut prendre $\alpha_3^{13,1} = -1$, $\alpha_3^{23,2} = -1$ et les autres coefficients 0 pour obtenir $\overline{N} = N$. D'où, N est surjectif.

D'un autre côté, si on trouve des coefficients tels que N est surjectif, considérons w tel qu'il existe ψ tel que $N(\psi) = w$ Alors, on définit

$$\varphi = \left(\sum_{t=1}^{3} -\alpha_3^{13,t} \psi^t \right) dx^1 + \left(\sum_{t=1}^{3} -\alpha_3^{23,t} \psi^t \right) dx^2,$$

et on a que

$$\overline{N}(\varphi) = N(\psi) = w,$$

et donc, $\overline{N}$ est également surjectif.

Ainsi, notre opérateur noyau $\overline{N}$ a un aspect canonique parmi les opérateurs noyau linéaires d'ordre 1.

Deuxième partie

L'équation $A\nabla u + \nabla u^t A = F$

Chapitre 6

Introduction

Considérons l'équation

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F$$

dans un ouvert borné Ω, où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $F = \left(F^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ sont nos données et $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ est notre inconnue. Plus précisément, on s'intéresse à résoudre cette équation globalement dans un ouvert, ainsi qu'au problème de Dirichlet, c'est-à-dire, ajouter une condition du type $u = u_0$ sur $\partial\Omega$.

L'idée principale pour étudier cette équation est de séparer partie symétrique et antisymétrique. En effet, on rappelle que pour toute matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on peut associer de façon unique une matrice symétrique notée M_s et une matrice antisymétrique M_a de telle sorte que $M = M_s + M_a$. En effet, on a $M_s = \frac{1}{2}\left(M + M^t\right)$ et $M_a = \frac{1}{2}\left(M - M^t\right)$. Un simple calcul nous donne alors que notre équation est équivalente au système

$$\begin{cases} A_s\nabla u + (\nabla u)^t A_s = F_s \\ A_a\nabla u + (\nabla u)^t A_a = F_a. \end{cases}$$

Notre analyse du problème se sépare alors de façon naturelle et trois parties. Premièrement, on s'intéresse au cas ou on suppose que A est symétrique, deuxièmement au cas où A est antisymétrique, et on finira par étudier la cas sans hypothèse de symétrie sur A mais en séparant l'équation comme dans le système ci-dessus.

6.1 Le cas où A est symétrique

Dans le cas où A est symétrique, l'équation

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F$$

est équivalente à

$$\nabla\left[Au\right] + \left(\nabla\left[Au\right]\right)^t = F$$

et donc chercher des solutions de ces équations s'inscrit comme une généralisation de l'équation du gradient symétrisé

$$\nabla u + (\nabla u)^t = F. \tag{6.1}$$

Cette dernière équation apparaît dans certains problèmes d'élasticité, plus précisément, le tenseur de déformations linéarisé peut se voir comme le membre de droite de l'équation du gradient symétrisé et u est alors le vecteur de déplacement (voir [15].)

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution de l'équation du gradient symétrisé (6.1) sont déjà connues dans le cas où on résout l'équation dans un domaine simplement connexe. Une première condition évidente est que F doit être symétrique. La deuxième condition est appelée la condition de Saint-Venant (voir [4, Theorem 6.18-1]) : il existe une solution de (6.1) si et seulement si pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,

$$\left(F^{ik}_{x_j} - F^{jk}_{x_i}\right)_{x_l} = \left(F^{il}_{x_j} - F^{jl}_{x_i}\right)_{x_k}.$$

On propose trois améliorations : On généralise au cas où A n'est pas l'identité, mais juste une matrice symétrique quelconque, on résout l'équation dans un domaine pas nécessairement simplement connexe et on ajoute une condition de Dirichlet.

Avant de pouvoir donner le résultat principal, on commence par fixer quelques notations.

Notation 6.1 (Potentiels de Dirichlet et Neumann)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe de bord C^∞, $r \geqslant 0$, $0 < h < 1$. Pour tout $\varphi \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}\right)$, on note $\mathcal{D}[\varphi]$ respectivement $\mathcal{N}[\varphi]$, le potentiel de Dirichlet respectivement Neumann de φ. C'est-à-dire, $\mathcal{D}[\varphi]$,$\mathcal{N}[\varphi] \in C^{r+2,h}\left(\overline{\Omega}\right)$ sont les uniques solutions des systèmes

$$\begin{cases} -\Delta\mathcal{D}[\varphi] = \varphi & \text{dans } \Omega \\ \mathcal{D}[\varphi] = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} -\Delta\mathcal{N}[\varphi] = \varphi - \fint \varphi & \text{dans } \Omega \\ \langle\nabla\mathcal{N}[\varphi], \nu\rangle = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \int_\Omega \mathcal{N}[\varphi] = 0, & \end{cases}$$

où $\fint \varphi$ dénote la moyenne de φ sur Ω,

$$\fint \varphi = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varphi.$$

Le résultat principal est alors le suivant.

Théorème 6.2.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe de bord C^∞, $r \geqslant 2$, $F = \left(F^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique. Soit encore $M_k = \left(M^{ij}_k\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ défini par

$$M^{ij}_k = F^{ik}_{x_j} - F^{jk}_{x_i}.$$

Alors, il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.2}$$

si et seulement si

(i) $F^t = F$;

(ii) pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,
$$F^{ik}_{x_j x_l} - F^{jk}_{x_i x_l} + F^{jl}_{x_i x_k} - F^{il}_{x_j x_k} = 0;$$

(iii) les propriétés suivantes sont vérifiées sur $\partial\Omega$:

- *pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,*
$$F^{ik}\nu^j\nu^l - F^{jk}\nu^i\nu^l + F^{jl}\nu^i\nu^k - F^{il}\nu^j\nu^k = 0; \tag{6.3}$$
- *pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,*
$$\nu^k\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\sum_{t=1}^n \left(F^{it}\nu^j - F^{jt}\nu^i\right)\nu^t\right] - \nu^l\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\sum_{t=1}^n \left(F^{it}\nu^j - F^{jt}\nu^i\right)\nu^t\right] = \nu^k M^{ij}_l - \nu^l M^{ij}_k, \tag{6.4}$$

  ou, de façon plus condensée, (6.4) *s'écrit aussi*
$$\nu \wedge M^{ij} = \nu \wedge \nabla\left[(F\nu \wedge \nu)^{ij}\right];$$

(iv) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_T(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *et pour tout* $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} M_k^{ij} \chi^k = \int_{\partial\Omega} (F\nu \wedge \nu)^{ij} \langle \chi, \nu \rangle \tag{6.5}$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega} M_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{D}[\chi^j] + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} F^{ij} \chi^j = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} (F\nu \wedge \nu)^{ij} \left\langle \nabla \mathcal{D}[\chi^j], \nu \right\rangle ; \tag{6.6}$$

(v) pour tout $x \in \Omega$ *et tout* $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$(\mathrm{Im}A)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\left(F_{x_k}(x) - M_k(x)\right),$$

c'est-à-dire pour tout $a \in (\mathrm{Im}A)^{\perp}$, $1 \leqslant i, k \leqslant n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \left(F_{x_k}^{ij} - F_{x_j}^{ik} + F_{x_i}^{jk} \right) a^j = 0.$$

Si de plus A est inversible, alors les solutions de (6.2) *sont uniques.*

Remarque 6.3.
Dans le théorème ci-dessus (ainsi que dans tous nos résultats sur le problème de Dirichlet) on résout le problème avec une condition homogène sur le bord, c'est-à-dire, on ajoute la condition $u = 0$ sur le bord à la place de $u = u_0$ sur le bord. Néanmoins, le résultat pour les solutions du problème

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

consiste alors simplement à écrire le théorème ci-dessus avec $F - A\nabla u_0 - (\nabla u_0)^t A$ à la place de F.

L'idée principale de la démonstration est de construire un champ de matrices antisymétriques Φ tel que le problème

$$\begin{cases} \nabla v = \frac{1}{2}(F + \Phi) & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ v(\Omega) \subset \mathrm{Im}A. \end{cases}$$

En effet, le fait que $v(\Omega) \subset \mathrm{Im}A$ nous permet alors de construire u tel que $Au = v$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. De plus, l'antisymétrie de Φ nous donne alors que

$$A\nabla u + \nabla u^t A = \nabla v + (\nabla v)^t = \frac{1}{2}(F + \Phi + F - \Phi) = F.$$

Toute la difficulté réside alors dans la construction de Φ.

On donnera également des conditions nécessaires et suffisantes pour les solutions de l'équation $A\nabla u + (\nabla u)^t A = F$ sans donnée de Dirichlet sur le bord.

6.2 Le cas où A est antisymétrique

Dans le cas où A est antisymétrique l'équation

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F$$

est équivalente à

$$\nabla[Au] - (\nabla[Au])^t = F$$

et donc chercher une solution de ces équations s'inscrit comme une généralisation de l'équation du rotationnel

$$\nabla u - (\nabla u)^t = F, \tag{6.7}$$

qui est donc une application directe du lemme de Poincaré pour les 1 formes.

Dans le cas où A n'est pas inversible, le problème de Dirichlet devient très différent du problème sans contrainte.

Pour le problème sans condition, l'idée est de ramener l'étude de

$$\begin{cases} \nabla v - (\nabla v)^t = F \\ v(\Omega) \subset \mathrm{Im}A \end{cases}$$

à l'étude de

$$\begin{cases} \nabla v - (\nabla v)^t = F \\ \langle v, a_1 \rangle = ... = \langle v, a_k \rangle = 0 \end{cases}$$

où $(\mathrm{Im}A)^\perp = \mathrm{span}(a_1, ..., a_k)$. Les résultats de la section 10.2 traitent ce type de problème. On a par exemple le résultat suivant.

Théorème 6.4.
Soit $R > 0$, $\Omega = B_R(0)$ une boule, $r \geqslant 1$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice antisymétrique et $F = (F^{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$. Alors, il existe $u \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tel que

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F \tag{6.8}$$

si et seulement si

(i) $F = -F^t$ dans Ω ;

(ii) $dF = 0$ dans Ω, c'est-à-dire, $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0;$$

(iii) pour tout $\xi, \eta \in \mathrm{Ker}A$,

$$\langle F\xi, \eta \rangle = 0$$

dans Ω.

Pour le problème de Dirichlet, on est pour le moment seulement en mesure de donner des résultats si $\mathrm{rang}A = n - 1$. En effet, dans ce cas là, on se ramène à étudier le problème

$$\begin{cases} \nabla v - (\nabla v)^t = F \\ \langle v, a \rangle = 0 \\ v = 0 \text{ sur le bord} \end{cases}$$

qui est un problème avec une forte composante géométrique (voir la sous-section 10.2.1.)

Pour éviter de trop lourdes notations, voici un exemple significatif dans le cas où $(\mathrm{Im}A) = (e^n)^\perp$, où e^n est le $n^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On peut en réalité toujours se ramener à ce cas là par une rotation qui envoie le générateur de $(\mathrm{Im}A)^\perp$ sur e^n. Pour le résultat dans le cas général, voir le théorème 8.8.

Théorème 6.5.
Soient $n = 2m + 1$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice antisymétrique telle que $\mathrm{Im}A = (e^n)^\perp$, $r \geqslant 2$, $O \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un ouvert borné contractile dont le bord est C^∞, $\beta_-, \beta_+ \in C^r\left(\overline{O}\right)$ tels que $\beta_- < \beta_+$ sur O. Soit alors

$$\Omega = \{x = (\hat{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \hat{x} \in O \ \textit{et} \ \beta_-(\hat{x}) < x_n < \beta_+(\hat{x})\}$$

et $F = \left(F^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$. *Alors, il existe* $u \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *tel que*

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

si et seulement si

(i) $F^t = -F$ *dans* Ω *;*

(ii) $dF = 0$ *dans* Ω, *c'est-à-dire, pour tout* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0;$$

(iii) $\nu \wedge F = 0$ *sur* $\{x = (\hat{x}, x_n) \in \partial\Omega \ : \ x_n = \beta_-(\hat{x}) \text{ ou } x_n = \beta_+(x_n)\}$, *c'est-à-dire, pour tout* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j + F^{jk}\nu^i = 0;$$

(iv) pour tout $\hat{x} \in \partial O$, $\beta_-(\hat{x}) \leqslant x_n \leqslant \beta_+(\hat{x})$ *et pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$F^{in}(x) = 0;$$

(v) pour tout $\hat{x} \in O$ *et pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_{\beta_-(\hat{x})}^{\beta_+(\hat{x})} F^{in}(\hat{x}, t)\, dt = 0.$$

6.3 Le cas général

Comme mentionné plus haut, dans le cas où on n'a pas d'hypothèse de symétrie sur A, on sépare l'équation en partie symétrique et antisymétrique pour obtenir le système

$$\begin{cases} A_s\nabla u + (\nabla u)^t A_s = F_s \\ A_a\nabla u + (\nabla u)^t A_a = F_a. \end{cases}$$

Le résultat principal obtenu dans ce cas là est le suivant.

Théorème 6.6.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné et de bord* C^∞, $r \geqslant 2$ *un entier,* $F = \left(F^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ *et* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Soit encore* $(M_s)_k = \left((M_s)^{ij}_k\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^{r-1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ *défini par*

$$(M_s)^{ij}_k = (F_s)^{ik}_{x_j} - (F_s)^{jk}_{x_i}.$$

Aspect nécessaire. *Si il existe* $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *une solution de*

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F \tag{6.9}$$

dans Ω, *alors*

(i) il existe $x_0 \in \Omega$ *et* $C_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tels que*

$$AC_0 + C_0^t A = F(x_0);$$

(ii) pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,

$$(F_s)^{ik}_{x_j x_l} - (F_s)^{jk}_{x_i x_l} + (F_s)^{jl}_{x_i x_k} - (F_s)^{il}_{x_j x_k} = 0$$

dans Ω *;*

(iii) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_N(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} (M_s)_k^{ij} \chi^k = 0 \tag{6.10}$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega} (M_s)_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{N}[\chi^j] = -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} F_s^{ij} \chi^j; \tag{6.11}$$

Aspect nécessaire et suffisant. *Si de plus A_s est inversible et qu'il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ une solution de (6.9), alors,*

(iv) pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$2\frac{\partial}{\partial x_k} F_a = A_a A_s^{-1} (M_s)_k - (M_s)_k A_s^{-1} A_a + A_a A_s^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} F_s\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} F_s\right) A_s^{-1} A_a,$$

dans Ω.

Réciproquement, si les conditions (i) à (iv) sont vérifiées, alors, il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ une solution de (6.9).

Pour finir, toujours sous l'hypothèse que A_s est inversible, les solutions de

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0$$

sont données par des fonctions affines $u(x) = Cx + c$ où C est une matrice qui vérifie $AC + C^t A = 0$ et $c \in \mathbb{R}^n$ est quelconque.

L'idée de la démonstration de l'aspect suffisant est de résoudre

$$\begin{cases} A_s \nabla u + (\nabla u)^t A_s = F_s & \text{dans } \Omega \\ \nabla u(x_0) = C_0 \end{cases}$$

et de montrer à l'aide de (i) et (iv) qu'il s'agit en réalité d'une solution de (6.9).

On montre aussi un théorème analogue pour résoudre le problème de Dirichlet.

6.4 Les équations du gradient et du rotationnel sous contrainte

Pour finir cette partie, on donnera les résultats sur lesquels se basent nos critères des autres chapitres. Premièrement, on discutera l'existence de solutions du problème du gradient suivant

$$\begin{cases} \nabla u = F \\ u(\Omega) \subset S \end{cases}$$

où $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ et S, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ sont nos données et $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ est notre inconnue. On prouvera le résultat suivant ainsi que le résultat analogue dans le cas où on ajoute une condition de Dirichlet, $u = g$ sur $\partial\Omega$.

Théorème 6.7.
Soient $r \geqslant 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe de bord C^∞, $F \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ et $S \subset \mathbb{R}^n$ un sous espace vectoriel.

Alors, il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla u = F & \text{dans } \Omega \\ u(\Omega) \subset S \end{cases} \tag{6.12}$$

si et seulement si

(i) pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} = F^{ik}_{x_j};$$

(ii) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_N(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} F^{ij} \chi^j = 0;$$

(iii) pour tout $x \in \Omega$,

$$S^{\perp} \subset \operatorname{Ker} F(x)^t .$$

On discutera dans un deuxième temps deux problèmes du rotationnel sous contrainte. Le premier est

$$\begin{cases} \nabla u - (\nabla u)^t = F & \text{dans } \Omega \\ u^{l+1} = \ldots = u^n = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

qui est le problème dont découle le théorème 6.4. Le deuxième est

$$\begin{cases} \nabla u - (\nabla u)^t = F & \text{dans } \Omega \\ \langle a, u \rangle = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur donné.

On commence par étudier le cas où a est constant, qui est ce dont on a besoin pour montrer le théorème 6.5.

Ensuite, on propose quelques résultats concernant le problème dans le cas où a n'est pas constant. Dans ce cas là, le problème n'est plus lié à notre équation

$$A \nabla u + (\nabla u)^t A = F,$$

mais les problèmes de Poincaré sous contrainte comme par exemple les résultats de la section 8.5 dans [7] permettent d'établir des résultats de type théorème de Darboux (voir par exemple [7, §14.3.2].)

L'énoncé du théorème fait intervenir la notion de domaine C^r-a-simple (voir définition 10.14) c'est-à-dire, pour $a \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, on suppose qu'il existe $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un ouvert, $\gamma \in C^{r+1}(E, \mathbb{R}^n)$, $\alpha_-, \alpha_+ \in C^r(\Omega)$ tels que $\alpha_- < 0$ sur Ω, $\alpha_+ >$ sur Ω, E contient

$$\left\{(x, t) \;:\; x \in \overline{\Omega} \text{ et } \alpha_-(x) \leqslant t \leqslant \alpha_+(x)\right\}$$

et γ est le flot de a, c'est-à-dire, γ est une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x, t) = a(\gamma(x, t)) & \text{pour tout } t \in]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[\\ \gamma(x, 0) = x \end{cases}$$

Théorème 6.8.
Soient $r \geqslant 2$, Ω *un ouvert borné de bord Lipschitz,* $a \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *tel que* Ω *est* C^r*-a-simple,* $(\gamma, \alpha_-, \alpha_+)$ *comme ci-dessus et* $F = \left(F^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n}\right)$.

Aspect nécessaire. *Si il existe* $u \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *une solution de*

$$\begin{cases} \nabla u - (\nabla u)^t = F & \textit{dans } \Omega \\ \langle a, u \rangle = 0 & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.13}$$

alors,

(i) $F^t = -F$ *dans* Ω *;*

(ii) $dF = 0$ *dans* Ω, *c'est-à-dire, pour tout* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0;$$

(iii) $\nu \wedge F = 0$ *sur* $\{x \in \partial\Omega \ : \ \alpha_- (x) = 0$ *ou* $\alpha_+ (x) = 0\}$, *c'est-à-dire, pour tout* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$

$$F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j + F^{jk}\nu^i = 0;$$

(iv) pour tout $x \in \partial\Omega$ *tel que* $\alpha_- (x) < 0 < \alpha_+ (x)$, *et pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\sum_{j=1}^{n} F^{ij} (x) \, a^j (x) = 0;$$

(v) pour tout $x \in \Omega$ *et* $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \sum_{k,l=1}^{n} a_l (\gamma (x, t)) \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} (x, t) \, F^{kl} (\gamma (x, t)) \, dt = 0.$$

Aspect suffisant. *Si les conditions (i) à (v) ci dessus sont vérifiées, alors il existe une unique solution* $u \in C^r (\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0 \left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *de* (6.13).

Aspect nécessaire et suffisant. *Si* Ω *est* C^r*-a-simple jusqu'au bord, c'est à dire,* $\alpha_-, \alpha_+ \in C^r \left(\overline{\Omega}\right)$, *alors, les conditions (i) à (v) sont vérifiées si et seulement si il existe une unique solution* $u \in C^r \left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *de* (6.13).

Ces résultats sont contenus dans [2].

Chapitre 7

Le cas où A est symétrique

On commence par donner le résultat pour l'équation sans contrainte, puis on donnera le résultat pour le problème de Dirichlet.

Théorème 7.1.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné connexe et de bord* C^∞, $r \geqslant 2$, $F = \left(F^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n}\right)$ *et* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *symétrique. Soit encore* $M_k = \left(M_k^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^{r-1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n}\right)$ *défini par*

$$M_k^{ij} = F_{x_j}^{ik} - F_{x_i}^{jk}.$$

Alors, il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *tel que*

$$A \nabla u + (\nabla u)^t A = F \tag{7.1}$$

si et seulement si

(i) $F = F^t$;

(ii) il existe $x_0 \in \Omega$ *tel que pour tout* $\xi, \eta \in \operatorname{Ker} A$,

$$\langle F(x_0)\,\xi, \eta \rangle = 0;$$

(iii) pour tout $1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n$,

$$F_{x_j x_l}^{ik} - F_{x_i x_l}^{jk} + F_{x_i x_k}^{jl} - F_{x_j x_k}^{il} = 0;$$

(iv) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_N(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *et pour tout* $1 \leqslant i,j \leqslant n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_\Omega M_k^{ij} \chi^k = 0 \tag{7.2}$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \int_\Omega M_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{N}[\chi^j] = -\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega F^{ij} \chi^j; \tag{7.3}$$

(v) pour tout $x \in \Omega$ *et tout* $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$(\operatorname{Im} A)^\perp \subset \operatorname{Ker}\left(F_{x_k}(x) - M_k(x)\right),$$

c'est-à-dire, pour tout $a \in (\operatorname{Im} A)^\perp$, $1 \leqslant i,k \leqslant n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \left(F_{x_k}^{ij} - F_{x_j}^{ik} + F_{x_i}^{jk}\right) a^j = 0.$$

Si de plus, A est inversible, alors pour tout $u \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$,

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0$$

est équivalent à ce qu'il existe $C_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice antisymétrique et $c_0 \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tels que

$$u = A^{-1}C_0 x + c_0.$$

Démonstration. Commençons par vérifier l'aspect nécessaire. Supposons que $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ soit une solution de (7.1). Alors, (i) est trivialement vérifiée. De plus, par le théorème B.4, (ii) est également vérifiée. Posons $v := Au$. Alors, v est une solution de

$$\nabla v + (\nabla v)^t = F.$$

Ainsi, pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,

$$\begin{aligned} F^{ik}_{x_j x_l} - F^{jk}_{x_i x_l} + F^{jl}_{x_i x_k} - F^{il}_{x_j x_k} =& v^i_{x_j x_k x_l} + v^k_{x_i x_j x_l} - v^j_{x_i x_k x_l} - v^k_{x_i x_j x_l} \\ &+ v^j_{x_i x_k x_l} + v^l_{x_i x_j x_k} - v^i_{x_j x_k x_l} - v^l_{x_i x_j x_k} = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre (iii). Soit maintenant $\chi \in \mathcal{H}_N(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Alors, une simple intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_\Omega M^{ij}_k \chi^k =& \sum_{k=1}^n \int_\Omega \left(F^{ik}_{x_j} - F^{jk}_{x_i}\right)\chi^k \\ =& \sum_{k=1}^n \int_\Omega \left(v^i_{x_j x_k} + v^k_{x_i x_j} - v^j_{x_i x_k} - v^k_{x_i x_j}\right)\chi^k \\ =& \sum_{k=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\left[v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right]\chi^k \\ =& \int_{\partial\Omega} \left(v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right)\underbrace{\langle \chi, \nu\rangle}_{=0} - \int_\Omega \left(v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right)\underbrace{\operatorname{div}\chi}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

ce qui établit (7.2). Passons à la preuve de (7.3). Pour ceci, commençons par remarquer que si $\chi \in \mathcal{H}_N(\Omega, \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $\int_\Omega \chi^j = 0$. En effet,

$$\int_\Omega \chi^j = \int_\Omega \langle \nabla[x_j], \chi\rangle = \int_{\partial\Omega} x_j \underbrace{\langle \chi, \nu\rangle}_{=0} - \int_\Omega x_j \underbrace{\operatorname{div}\chi}_{=0} = 0.$$

En conséquence de ceci, on a que $-\Delta\mathcal{N}[\chi^j] = \chi^j$ dans Ω. Alors, par un calcul similaire à ci-dessus, on déduit que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n \int_\Omega M^{ij}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{N}[\chi^j] =& \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} \left(v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right)\underbrace{\left\langle \nabla\mathcal{N}[\chi^j], \nu\right\rangle}_{=0} - \sum_{j=1}^n \int_\Omega \underbrace{\left(v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right)}_{=-F^{ij}+2v^i_{x_j}}\underbrace{\operatorname{div}\nabla\mathcal{N}[\chi^j]}_{=-\chi^j} \\ =& -\sum_{j=1}^n \int_\Omega F^{ij}\chi^j + 2\sum_{j=1}^n \int_\Omega v^i_{x_j}\chi^j \\ =& -\sum_{j=1}^n \int_\Omega F^{ij}\chi^j + 2\int_{\partial\Omega} v^i \langle \chi, \nu\rangle - 2\int_\Omega v^i \operatorname{div}\chi \\ =& -\sum_{j=1}^n \int_\Omega F^{ij}\chi^j, \end{aligned}$$

ce qui établit (7.3) et montre que (iv) est nécessaire. Pour finir, soit $a \in (\mathrm{Im}A)^{\perp}$. Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left(F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i}\right) a_j &= \sum_{j=1}^{n}\left(v^{i}_{x_j x_k} + v^{j}_{x_i x_k} - v^{i}_{x_j x_k} - v^{k}_{x_i x_j} + v^{j}_{x_i x_k} + v^{k}_{x_i x_j}\right) a_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} 2 v^{j}_{x_i x_k} a_j = 2\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left\langle v, a\right\rangle .\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \Omega$, $v(x) = Au(x) \in \mathrm{Im}A$, ainsi, $\langle a, v\rangle = 0$, ce qui montre (v).

Passons maintenant à l'aspect suffisant.

Étape 1 : On commence par construire $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que

$$AC + C^t A = F(x_0).$$

L'existence d'un tel C est garantie par (ii) et le théorème B.4.

Étape 2 : On construit $\Phi = \left(\Phi^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ antisymétrique tel que pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$

$$\begin{cases} \Phi^{ij}_{x_k} = M^{ij}_{k} = F^{ik}_{x_j} - F^{jk}_{x_i} & \text{dans } \Omega \\ \Phi^{ij}(x_0) = \left[2AC - F(x_0)\right]^{ij}. \end{cases} \tag{7.4}$$

Pour ceci, on utilise le lemme de Poincaré pour les 0 formes (voir théorème A.9.) En effet, on a pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,

$$\left(M^{ij}_{k}\right)_{x_l} - \left(M^{ij}_{l}\right)_{x_k} = F^{ik}_{x_j x_l} - F^{jk}_{x_i x_l} - F^{il}_{x_j x_k} + F^{jk}_{x_i x_k} \overset{(iii)}{=} 0.$$

De plus, (7.2) nous donne précisément que la deuxième hypothèse du lemme de Poincaré pour les 0 formes est vérifiée. Il existe donc $\Phi = \left(\Phi^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, une solution de

$$\Phi^{ij}_{x_k} = M^{ij}_{x_k}.$$

De plus quitte à remplacer Φ par $\Phi - \Phi(x_0) + 2AC - F(x_0)$, on a que Φ est une solution de (7.4) et quitte à remplacer Φ par $\frac{1}{2}\left(\Phi - \Phi^t\right)$, on peut supposer sans perte de généralité que Φ est antisymétrique.

Étape 3 : On construit $v \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla v = \frac{1}{2}(F + \Phi) & \text{dans } \Omega \\ v(\Omega) \subset \mathrm{Im}A. \end{cases} \tag{7.5}$$

Pour ceci, on utilise le théorème 10.1. Pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[F^{ij} + \Phi^{ij}\right] = F^{ij}_{x_k} + M^{ij}_{x_k} = F^{ij}_{x_k} + F^{ik}_{x_j} - F^{jk}_{x_i},$$

tandis que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[F^{ik} + \Phi^{ik}\right] = F^{ik}_{x_j} + M^{ik}_{x_j} = F^{ik}_{x_j} + F^{ij}_{x_k} - F^{jk}_{x_i},$$

ce qui montre que la première hypothèse du théorème 10.1 est vérifiée. De plus, pour tout $\chi \in \mathcal{H}_N(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega} F^{ij}\chi^j &\overset{(7.3)}{=} -\sum_{j,k=1}^{n}\int_{\Omega} M^{ij}_{k}\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{N}[\chi^j] \\ &= -\sum_{j,k=1}^{n}\int_{\Omega} \Phi^{ij}_{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{N}[\chi^j]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left\langle \nabla \Phi^{ij}, \nabla \mathcal{N}[\chi^j] \right\rangle \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \Phi^{ij} \underbrace{\left\langle \nabla \mathcal{N}[\chi^j], \nu \right\rangle}_{=0} + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \Phi^{ij} \underbrace{\Delta \mathcal{N}[\chi^j]}_{=-\chi^j} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \Phi^{ij} \chi^j,
\end{aligned}$$

où on a utilisé à nouveau que $\int_\Omega \chi^j = 0$. Ainsi, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(F^{ij} + \Phi^{ij}\right) \chi^j = 0$$

et donc la deuxième hypothèse du théorème 10.1 vérifiée. Pour finir, il nous faut montrer que

$$(\mathrm{Im}A)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\,(F+\Phi)^t = \mathrm{Ker}\,(F-\Phi)\,.$$

Or, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ et $a \in (\mathrm{Im}A)^{\perp}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[F - \Phi\right] a = \left(F_{x_k} - \Phi_{x_k}\right) a = \left(F_{x_k} - M_k\right) a \overset{(v)}{=} 0.$$

De plus,

$$\left(F\left(x_0\right) - \Phi\left(x_0\right)\right) a = \left(F\left(x_0\right) - 2AC + F\left(x_0\right)\right) a = 2\left(F\left(x_0\right) - AC\right) a = 2C^t A a = 0$$

car, par symétrie de A, $(\mathrm{Im}A)^{\perp} = \mathrm{Ker}A$. Ainsi, on en déduit que $(F-\Phi)\,a = 0$ dans Ω pour tout $a \in (\mathrm{Im}A)^{\perp}$.

Étape 4 : On construit $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que $v = Au$. Il s'agit d'une application directe du lemme A.17.

L'application u ainsi construite est une solution de (7.1). En effet,

$$A\nabla u + \nabla u^t A = \nabla v + \nabla v^t = \frac{1}{2}\left(F + \Phi + F^t + \Phi^t\right) = F.$$

Pour terminer la preuve il nous faut montrer que si $u \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ est une solution de

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0,$$

alors, il existe $C_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice antisymétrique et $c_0 \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tels que

$$u = A^{-1} C_0 x + c_0.$$

Pour ceci, posons $v = Au$. On a alors pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$

$$v^i_{x_j} = -v^j_{x_i}.$$

Par conséquent, pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$, on a

$$v^i_{x_j x_k} = -v^j_{x_i x_k} = v^k_{x_i x_j} = -v^i_{x_j x_k},$$

et donc $\nabla^2 v^i = 0$ d'où v est affine. Il existe donc $C_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $c_1 \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$v = C_0 x + c_1.$$

De plus on, a que $C_0 + C_0^t = \nabla v + (\nabla v)^t = 0$, d'où C_0 est antisymétrique. Pour finir, posant $c_0 = A^{-1} c_1$, on a bien

$$u = A^{-1} C_0 x + c_0.$$

□

Remarque 7.2. (*i*) Au vu du théorème B.4, on voit que l'hypothèse (*ii*) peut être remplacée par

$$\left(I - AA^{\dagger}\right) F(x_0) \left(I - A^{\dagger}A\right) = 0,$$

où $A^{\dagger}$ dénote le pseudo-inverse de Moore-Penrose. Ou encore, supposer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que

$$AX + X^t A = F(x_0);$$

(*ii*) Dans le cas où Ω est simplement connexe, l'hypothèse (*iv*) est trivialement vérifiée. De plus, on a alors pas besoin de demander la régularité jusqu'au bord, tout en ayant le même gain de régularité ;

(*iii*) Dans le cas où A est inversible, les hypothèses (*ii*) et (*v*) sont trivialement vérifiées ;

(*iv*) Si $(x_0, c_0, C_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$ sont donnés, en remplaçant l'hypothèse (*ii*) par le fait que $AC_0 + C_0^t A = F(x_0)$, on obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions du problème

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \text{dans } \Omega \\ \nabla u(x_0) = C_0 & \\ u(x_0) = c_0. & \end{cases} \tag{7.6}$$

En effet, $AC_0 + C_0^t A = F(x_0)$ est clairement nécessaire pour l'existence d'une solution du problème ci-dessus. De plus si on suppose que $AC_0 + C_0^t A = F(x_0)$, le théorème B.4 nous garantit que l'hypothèse (*ii*) est vérifiée en x_0. Ainsi, si v est une solution du problème $A\nabla v + (\nabla v)^t A = F$ donnée par le théorème 7.1,

$$u(x) = v(x) - v(x_0) + c_0 - \nabla v(x_0)(x - x_0) + C_0(x - x_0).$$

est une solution de (7.6).

Théorème 7.3 (Problème de Dirichlet)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe de bord C^{∞}, $r \geqslant 2$, $F = (F^{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique. Soit encore $M_k = \left(M_k^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^{r-1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ défini par

$$M_k^{ij} = F_{x_j}^{ik} - F_{x_i}^{jk}.$$

Alors, il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.7}$$

si et seulement si

(i) $F^t = F$ *;*

(ii) pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,

$$F_{x_j x_l}^{ik} - F_{x_i x_l}^{jk} + F_{x_i x_k}^{jl} - F_{x_j x_k}^{il} = 0;$$

(iii) les propriétés suivantes sont vérifiées sur $\partial\Omega$:

- *pour tout* $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,

$$F^{ik}\nu^j\nu^l - F^{jk}\nu^i\nu^l + F^{jl}\nu^i\nu^k - F^{il}\nu^j\nu^k = 0; \tag{7.8}$$

- *pour tout* $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,

$$\nu^k \frac{\partial}{\partial x_l}\left[\sum_{t=1}^n \left(F^{it}\nu^j - F^{jt}\nu^i\right)\nu^t\right] - \nu^l \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\sum_{t=1}^n \left(F^{it}\nu^j - F^{jt}\nu^i\right)\nu^t\right] = \nu^k M_l^{ij} - \nu^l M_k^{ij}, \tag{7.9}$$

ou, de façon plus condensée, (7.9) *s'écrit aussi*

$$\nu \wedge M^{ij} = \nu \wedge \nabla\left[(F\nu \wedge \nu)^{ij}\right];$$

(iv) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_T(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *et pour tout* $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} M_k^{ij} \chi^k = \int_{\partial\Omega} (F\nu \wedge \nu)^{ij} \langle \chi, \nu \rangle \tag{7.10}$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega} M_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{D}[\chi^j] + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} F^{ij} \chi^j = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} (F\nu \wedge \nu)^{ij} \left\langle \nabla \mathcal{D}[\chi^j], \nu \right\rangle; \tag{7.11}$$

(v) pour tout $x \in \Omega$ *et tout* $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$(\mathrm{Im}A)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\left(F_{x_k}(x) - M_k(x)\right),$$

c'est-à-dire pour tout $a \in (\mathrm{Im}A)^{\perp}$, $1 \leqslant i, k \leqslant n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \left(F_{x_k}^{ij} - F_{x_j}^{ik} + F_{x_i}^{jk} \right) a^j = 0.$$

Si de plus A *est inversible, alors les solutions de* (7.7) *sont uniques.*

Démonstration. Commençons par l'aspect nécessaire. Soit donc $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ une solution de (7.7). Les propriétés (i), (ii) et (v) découlent du théorème 7.1. Posons $v = Au$. Alors, on a que v est une solution de

$$\begin{cases} \nabla v + (\nabla v)^t = F & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Remarquons que du fait que $v = 0$ sur $\partial\Omega$, posant $\alpha^i = \sum_{k=1}^{n} \nu^k v_{x_k}^i$, on a

$$\nabla v = \alpha \otimes \nu,$$

c'est à dire

$$v_{x_j}^i = \alpha^i \nu^j.$$

En effet, ceci découle du fait que v^i est un champ scalaire qui s'annule sur $\partial\Omega$ et donc $\nu \wedge \nabla v^i = 0$ ce qui implique encore que $\nabla v^i = \langle \nu, \nabla v^i \rangle \nu$. D'où

$$\begin{aligned} F^{ik}\nu^j\nu^l - F^{jk}\nu^i\nu^l + F^{jl}\nu^i\nu^k - F^{il}\nu^j\nu^k =& \alpha^i\nu^k\nu^j\nu^l + \alpha^k\nu^i\nu^j\nu^l - \alpha^j\nu^k\nu^i\nu^l - \alpha^k\nu^j\nu^i\nu^l \\ & + \alpha^j\nu^l\nu^i\nu^k + \alpha^k\nu^j\nu^i\nu^k - \alpha^i\nu^l\nu^j\nu^k - \alpha^l\nu^i\nu^j\nu^k \\ =& 0, \end{aligned}$$

ce qui montre (7.8). De plus

$$\begin{aligned} [F\nu]^i =& \sum_{k=1}^{n} F^{ik}\nu^k \\ =& \sum_{k=1}^{n} v_{x_k}^i \nu^k + \sum_{k=1}^{n} v_{x_i}^k \nu^k \\ =& \sum_{k=1}^{n} \alpha^i \nu^k \nu^k + \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \nu^k \nu^i \\ =& \alpha^i + \langle \alpha, \nu \rangle \nu^i. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$v_{x_j}^i - v_{x_i}^j = \alpha^i \nu^j - \alpha^j \nu^i$$

$$
\begin{aligned}
&= [F\nu]^i \nu^j - \langle \alpha, \nu \rangle \nu^i \nu^j - [F\nu]^j \nu^i + \langle \alpha, \nu \rangle \nu^j \nu^i \\
&= \sum_{t=1}^{n} F^{it} \nu^t \nu^j - \sum_{t=1}^{n} F^{jt} \nu^t \nu^i = (F\nu \wedge \nu)^{ij} .
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

Ce qui nous permet de conclure,

$$
\begin{aligned}
\left[\nu \wedge \nabla \left[(F\nu \wedge \nu)^{ij}\right]\right]^{kl} &= \left[\nu \wedge \nabla \left[\left(\nabla v - (\nabla v)^t\right)^{ij}\right]\right]^{kl} \\
&= \nu^k \frac{\partial}{\partial x_l} \left[v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right] - \nu^k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right] \\
&= \nu^k \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v^i_{x_l} - \frac{\partial}{\partial x_i} v^j_{x_l}\right) - \nu^l \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v^i_{x_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} v^j_{x_k}\right) \\
&= \nu^k \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left[F^{il} - v^l_{x_i}\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[F^{jl} - v^l_{x_j}\right]\right) \\
&\quad - \nu^l \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left[F^{ik} - v^k_{x_i}\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[F^{jk} - v^k_{x_j}\right]\right) \\
&= \nu^k \left(F^{il}_{x_j} - F^{jl}_{x_i}\right) - \nu^l \left(F^{ik}_{x_j} - F^{jk}_{x_i}\right) \\
&= \nu^k M^{ij}_l - \nu^l M^{ij}_k ,
\end{aligned}
$$

ce qui montre (7.9) et termine d'établir (*iii*). Soit maintenant $\chi \in \mathcal{H}_T(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Alors,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \int_\Omega M^{ij}_k \chi^k &= \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \left(F^{ik}_{x_j} - F^{jk}_{x_i}\right) \chi^k \\
&= \int_\Omega \left(v^i_{x_j x_k} + v^k_{x_i x_j} - v^j_{x_i x_k} - v^k_{x_i x_j}\right) \chi^k \\
&= \int_\Omega \left\langle \nabla \left[v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right], \chi \right\rangle \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right) \langle \chi, \nu \rangle - \int_\Omega \left(v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right) \underbrace{\operatorname{div} \chi}_{=0} \\
&\overset{(7.12)}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial\Omega} (F\nu \wedge \nu)^{ij} \langle \chi, \nu \rangle ,
\end{aligned}
$$

ce qui établit (7.10). De plus, par des calculs similaire à ci-dessus, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,k=1}^{n} \int_\Omega M^{ij}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{D}[\chi^j] + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega F^{ij} \chi^j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \left(v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right) \left\langle \nabla \mathcal{D}[\chi^j], \nu \right\rangle - \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left(v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right) \underbrace{\operatorname{div} \nabla \mathcal{D}[\chi^j]}_{=-\chi^j} + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left(v^i_{x_j} + v^j_{x_i}\right) \chi^j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \left(v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right) \left\langle \nabla \mathcal{D}[\chi^j], \nu \right\rangle + 2 \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega v^i_{x_j} \chi^j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \left(v^i_{x_j} - v^j_{x_i}\right) \left\langle \nabla \mathcal{D}[\chi^j], \nu \right\rangle + 2 \int_{\partial\Omega} \underbrace{v^i}_{=0} \langle \chi, \nu \rangle - 2 \int_\Omega v^i \underbrace{\operatorname{div} \chi}_{=0} \\
&\overset{(7.12)}{=} \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} (F\nu \wedge \nu)^{ij} \left\langle \nabla \mathcal{D}[\chi^j], \nu \right\rangle ,
\end{aligned}
$$

ce qui montre (7.11), et termine la démonstration de l'aspect nécessaire.

Passons à l'aspect suffisant.

Étape 1 : On construit $\Phi = \left(\Phi^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ antisymétrique tel que pour tout $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$

$$\begin{cases} \Phi^{ij}_{x_k} = M^{ij}_k & \text{dans } \Omega \\ \Phi^{ij} = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \left(F^{il}\nu^j - F^{jl}\nu^i\right)\nu^l & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.13}$$

Comme d'habitude, on utilise le lemme de Poincaré pour les 0 formes (voir théorème A.10.) Le fait que $\left(M^{ij}_k\right)_{x_l} = \left(M^{il}_l\right)_{x_k}$ découle de (ii), comme on l'a déjà vu dans l'étape 2 de la preuve du théorème 7.1. Ceci, avec (7.9) et (7.10) implique que toutes les hypothèses du lemme de Poincaré pour les 0 formes sont vérifiées et il existe $\Phi \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, une solution de (7.13). De plus, vu que le membre de droite et la donnée au bord dans (7.13) sont antisymétriques, quitte à remplacer Φ par $\frac{1}{2}\left(\Phi - \Phi^t\right)$, on peut supposer sans perte de généralité que Φ est antisymétrique.

Étape 2 : On construit $v \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla v = \frac{1}{2}\left(F + \Phi\right) & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ v\left(\Omega\right) \subset \operatorname{Im} A \end{cases} \tag{7.14}$$

Pour ceci, on utilise le théorème 10.3. Comme d'habitude (voir la preuve du théorème 7.1) la première hypothèse est vérifiée par construction de Φ. Soit $\chi \in \mathcal{H}_T\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right)$. Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega F^{ij}\chi^j &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \left(F\nu \wedge \nu\right)^{ij} \left\langle \nabla\mathcal{D}[\chi^j], \nu \right\rangle - \sum_{j,k=1}^{n} \int_\Omega M^{ij}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{D}[\chi^j] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \Phi^{ij} \left\langle \nabla\mathcal{D}[\chi^j], \nu \right\rangle - \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left\langle \nabla\Phi^{ij}, \nabla\mathcal{D}[\chi^j] \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \Phi^{ij} \underbrace{\operatorname{div} \nabla\mathcal{D}[\chi^j]}_{=-\chi^j} \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \Phi^{ij}\chi^j, \end{aligned}$$

ce qui montre que la deuxième hypothèse du théorème 10.3 est vérifiée. Montrons que la troisième hypothèse du théorème 10.3 est vérifiée, c'est-à-dire, montrons que pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$,

$$F^{ij} + \Phi^{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(F^{ik} + \Phi^{ik}\right)\nu^k\nu^j$$

sur $\partial\Omega$. Or, sur $\partial\Omega$, pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$, on a par construction de Φ,

$$\begin{aligned} \Phi^{ij}\nu^k &= \sum_{t=1}^{n} \left(F^{it}\nu^j - F^{jt}\nu^i\right)\nu^t\nu^k \\ &= \sum_{t=1}^{n} \underbrace{\left(F^{it}\nu^j\nu^k - F^{jt}\nu^i\nu^k\right)}_{\overset{(7.8)}{=}\left(F^{ik}\nu^j - F^{jt}\nu^i\right)\nu^t}\nu^t \\ &= \left(F^{ik}\nu^j - F^{jk}\nu^i\right)\sum_{t=1}^{n}\left(\nu^t\right)^2 \\ &= F^{ik}\nu^j - F^{jk}\nu^i. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Par conséquent pour tout $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$,

$$\left(F^{ij} + \Phi^{ij}\right)\nu^k = F^{ij}\nu^k + \Phi^{ij}\nu^k$$

$$\begin{aligned}
&= F^{ij}\nu^k + F^{ik}\nu^j - F^{jk}\nu^i \\
&= F^{ik}\nu^j + F^{ij}\nu^k - F^{kj}\nu^i \\
&= \left(F^{ik} + \Phi^{ik}\right)\nu^j.
\end{aligned}$$

Pour finir,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(F^{ik} + \Phi^{ik}\right)\nu^k\nu^j = \sum_{k=1}^{n}\left(F^{ij} + \Phi^{ij}\right)\left(\nu^k\right)^2 = F^{ij} + \Phi^{ij},$$

ce qui est précisément ce qu'on devait établir. La quatrième hypothèse du théorème 10.3 est également vérifiée puisque trivialement $0 \in \mathrm{Im}A$. Pour finir, il nous reste à montrer que $(\mathrm{Im}A)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\,(F+\Phi)^t = \mathrm{Ker}\,(F-\Phi)$. Soit donc $a \in (\mathrm{Im}A)^{\perp}$. Par les mêmes arguments que ceux présentés dans le preuve du théorème 7.1 à l'étape 3, on a qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}^n$ telle que $(F(x) - \Phi(x))\,a = c$ pour tout $x \in \Omega$. Montrons maintenant que $c \wedge \nu = 0$ sur $\partial\Omega$. Vu que c est constante et que le bord de Ω est régulier, ceci impliquera que $c = 0$. Or, on a

$$\begin{aligned}
[c \wedge \nu]^{ij} &= c^i\nu^j - c^j\nu^i \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(F^{ik}a_k\nu^j - \Phi^{ik}a_l\nu^j - F^{jk}a_k\nu^i + \Phi^{jk}a_k\nu^i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(F^{ik}a_k\nu^j - F^{jk}a_k\nu^i\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\Phi^{jk}\nu^i - \Phi^{ik}\nu^j\right)a_k \\
&\overset{(7.15)}{=} \sum_{k=1}^{n}\left(F^{ik}a_k\nu^j - F^{jk}a_k\nu^i\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(F^{ij}\nu^k - F^{ki}\nu^j - F^{ij}\nu^k + F^{kj}\nu^i\right)a_k = 0
\end{aligned}$$

comme souhaité. Toutes les hypothèses du théorème 10.3 sont donc vérifiées et ceci nous garantit l'existence de $v \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, une solution de (7.14).

Étape 3 : Nous sommes en mesure de conclure. Par le lemme A.17, il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\begin{cases} Au = v & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On vérifie alors directement que u ainsi défini est une solution de (7.7).

Pour terminer la preuve, il faut voir l'unicité des solutions. Supposons que u_1 et u_2 soient deux solutions de (7.7). Alors, $v = u_1 - u_2$ est une solution de

$$\begin{cases} A\nabla v + (\nabla v)^t A = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Et donc, par le théorème 7.1, il existe $C_0 \in \mathbb{R}^n$ une matrice antisymétrique et $K_0 \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tels que

$$v = A^{-1}C_0x + K_0$$

Alors, v est affine et s'annule sur le bord de Ω. Ce dernier étant régulier, ceci implique que $v = 0$ et donc $u_1 = u_2$, qui est ce qu'on voulait montrer. □

De nos résultats, on retrouve comme cas particulier le résultat sur le gradient symétrisé qui était déjà connu (voir [4, Theorem 6.18-1].)

Corollaire 7.4 (Gradient symétrisé)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert simplement connexe dont le bord est C^∞, $r \geqslant 2$ et $F = \left(F^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$. Alors, il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\nabla u + (\nabla u)^t = F$$

si et seulement si

(i) $F = F^t$ *dans* Ω *;*

(ii) *pour tout* $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,

$$F^{ik}_{x_j x_l} - F^{jk}_{x_i x_l} + F^{jl}_{x_i x_k} - F^{il}_{x_j x_k} = 0.$$

Démonstration. On propose de montrer le résultat en utilisant le théorème 7.1. L'aspect nécessaire est alors évident. Pour l'aspect suffisant, on constate qu'on est dans le cas où $A = I$ et donc les hypothèses (ii) et (v) du théorème 7.1 sont trivialement vérifiées. De plus, du fait que Ω est simplement connexe, on a que $\mathcal{H}_N(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{0\}$ (voir proposition A.4) d'où l'hypothèse (iv) est également trivialement vérifiée. Et ainsi, toutes les conditions du théorème 7.1 sont vérifiées et il existe donc une solution à notre problème. $\square$

Chapitre 8

Le cas où A est antisymétrique

On commence par adapter le lemme de Poincaré pour les 1 formes dans le cas où A est inversible. On discute dans un deuxième temps le cas où $\operatorname{rang} A = 2m = n-1$, qui repose sur une équation du rotationnel sous une contrainte du type $\langle a, u\rangle = 0$ et pour finir, on donne le résultat pour l'équation sans contrainte dans le cas général.

8.1 Le cas où A est inversible

Théorème 8.1.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe de bord C^∞, $r \geqslant 0$, $0 < h < 1$, $F = \left(F^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice antisymétrique et inversible.

Alors, il existe $u \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F \tag{8.1}$$

dans Ω si et seulement si

(i) $F^t = -F$;

(ii) $dF = 0$ *dans Ω, c'est-à-dire, pour tout $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$,*

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0$$

dans Ω ;

(iii) *pour tout $\chi \in \mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^2\right)$,*

$$\int_\Omega \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} F^{ij}\chi^{ij} = 0.$$

De plus, si Ω est simplement connexe, alors, pour tout $u \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}\right)$,

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0$$

si et seulement si il existe $\varphi \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que

$$u = A^{-1}\nabla\varphi$$

Démonstration. Il s'agit en réalité d'une application du lemme de Poincaré pour les 1 formes (voir théorème A.9.) Voyons l'aspect nécessaire. Soit $u \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, une solution de (8.1) et posons $v = Au$. Alors, vu que A est antisymétrique, v est une solution de

$$\nabla v - (\nabla v)^t = F.$$

De ceci, on peut directement déduire que (i) est vérifiée. Ainsi, on déduit qu'on peut en réalité voir l'équation ci-dessus comme une équation dans Λ^2. En effet, si on définit $f \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^2\right)$ par $f^{ij} = F^{ij}$ pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$, et $w \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^1\right)$ par $w^i = -v^i$, on a que l'équation ci-dessus devient

$$w^j_{x_i} - w^i_{x_j} = f^{ij}$$

pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$, ce qu'on peut écrire comme

$$dw = f.$$

Les propriétés (ii) et (iii) découlent alors du lemme de Poincaré pour les 1 formes (voir théorème A.9.)

Pour l'aspect suffisant, on utilise (i) pour identifier F a une 2 forme f comme ci-dessus. Le lemme de Poincaré pour les 1 formes nous garantit alors l'existence de $w \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^1\right)$ tel que

$$dw = f.$$

On identifie cette fois w avec le champ vectoriel $v \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ en posant $v^i = -w^i$ et on a alors que v est une solution de

$$\nabla v - (\nabla v)^t = F.$$

Posant alors $u = A^{-1}v$, on a que $u \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ est une solution de (8.1).

Pour terminer la preuve, il nous faut encore montrer que pour $u \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$,

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0$$

si et seulement si il existe $\varphi \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que

$$u = A^{-1}\nabla\varphi.$$

Commençons par constater que si $A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0$, alors, posant $v = Au$, on a que v est telle que

$$\nabla v - (\nabla v)^t = 0,$$

et donc par le lemme de Poincaré pour les 1 formes, vu que Ω est simplement connexe, il existe $\varphi \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que $\nabla\varphi = v$. Ainsi, $u = A^{-1}\nabla\varphi$. D'un autre côté, si $u = A^{-1}\nabla\varphi$, alors

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = \nabla^2\varphi - \nabla^2\varphi = 0,$$

ce qui termine la démonstration.

□

Remarque 8.2. (i) Rappelons (voir proposition A.4) que si $n = 2$, ou que Ω est contractile, $\mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^2\right) = \{0\}$ et l'hypothèse (iii) est donc triviale ;

(ii) Sous les mêmes hypothèses que le théorème ci-dessus, et si $(x_0, c_0, C_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$ sont donnés, il existe une solution de

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \text{dans } \Omega \\ \nabla u\,(x_0) = C_0 & \\ u\,(x_0) = c_0 & \end{cases} \tag{8.2}$$

si et seulement si les hypothèses (i), (ii) et (iii) sont vérifiées et que $AC_0 + C_0^t A = F\,(x_0)$. L'aspect nécessaire est évident, et pour l'aspect suffisant, la construction est la même que dans la remarque 7.2.

Exemple 8.3 (Optimalité de la régularité)**.**
On considère ici un exemple qui montre que pour avoir un gain de régularité il faut résoudre l'équation dans les espaces de Hölder avec $0 < h < 1$.

Par les résultats de [10], on a qu'il existe $h \in C^0\left([0,1]^2\right)$ tel qu'il n'existe pas de fonction $v \in C^1\left([0,1]^2, \mathbb{R}^2\right)$ avec $\operatorname{div} v = h$. Posons

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & h(x_1, x_2) \\ -h(x_1, x_2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, $F \in C^r\left([0,1]^2, \mathbb{R}^2\right)$ et $dF = 0$. Soit encore

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si il existait $u \in C^1\left([0,1]^2, \mathbb{R}^n\right)$, tel que

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F,$$

alors

$$u^1_{x_1} + u^2_{x_2} = F^{12} = h,$$

ce qui serait une contradiction.

Théorème 8.4 (Problème de Dirichlet)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné connexe de bord* C^∞, $r \geqslant 0$, $0 < h < 1$, $F = \left(F^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^{r,h}\left(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ *et* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *une matrice antisymétrique et inversible.*

Alors, il existe $u \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *tel que*

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{8.3}$$

si et seulement si

(i) $F^t = -F$ *;*

(ii) $dF = 0$ *dans* Ω, *c'est-à-dire, pour tout* $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0$$

dans Ω *;*

(iii) $\nu \wedge F = 0$ *sur* $\partial\Omega$, *c'est-à-dire, pour tout* $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$,

$$F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j + F^{jk}\nu^i = 0$$

sur $\partial\Omega$ *;*

(iv) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_T\left(\Omega, \Lambda^2\right)$,

$$\int_\Omega \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} F^{ij}\chi^{ij} = 0.$$

De plus, si Ω *est simplement connexe, alors pour tout* $u \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, *u est une solution de*

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{8.4}$$

si et seulement si il existe $\varphi \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}\right)$ *tel que* $\nabla\varphi = 0$ *sur* $\partial\Omega$ *et*

$$u = A^{-1}\nabla\varphi.$$

Démonstration. Là aussi, il s'agit en réalité d'une application du lemme de Poincaré pour les 1 formes. Voyons l'aspect nécessaire. Soit $u \in C^{r+1,h}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, une solution de (8.3) et posons $v = Au$. Alors, vu que A est antisymétrique, v est une solution de

$$\begin{cases} \nabla v - (\nabla v)^t = F & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De ceci, on déduit (i). On procède ensuite à la même identification avec les 2 formes que dans la preuve du théorème 8.1, et on déduit (ii) , (iii) et (iv) du lemme de Poincaré pour les 1 formes (voir théorème A.10.)

Passons maintenant à l'aspect suffisant. À nouveau, comme dans la preuve du théorème 8.1, notre hypothèse (i) nous permet d'identifier F à une 2 forme, et le lemme de Poincaré pour les 1 formes nous garantit l'existence de $w \in C^{r+1,h}(\Omega, \Lambda^1)$ tel que

$$\begin{cases} w^j_{x_i} - w^i_{x_j} = F^{ij} & \text{dans } \Omega \text{ pour tout } 1 \leqslant i < j \leqslant n \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}.$$

Posant $v^i = -w^i$, on construit alors $v \in C^{r+1,h}(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla v - (\nabla v)^t = F & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Donc, en définissant $u = A^{-1}v$, on obtient une solution de (8.3).

Pour finir la preuve, il faut montrer que pour tout $u \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, u est une solution de (8.4) si et seulement si il existe $\varphi \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que $\nabla\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$ et

$$u = A^{-1}\nabla\varphi.$$

Or, si u est une solution de (8.4), alors, par le théorème 8.1, il existe $\varphi \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que $u = A^{-1}\nabla\varphi$. De plus, sur le bord de Ω, $\nabla\varphi = Au = 0$. La réciproque consiste en une vérification directe. □

Remarque 8.5.
Dans le cas où $n = 2$, on rappelle que $\mathcal{H}_T = \{C dx^1 \wedge dx^2 \ : \ C \in \mathbb{R}\}$ et donc, (iv) se lit

$$\int_\Omega F^{12} = 0;$$

8.2 Le cas où rang$A = n - 1$

On s'intéresse maintenant au cas où A n'est pas inversible. Pour le problème de Cauchy, on donne le résultat directement ici, sans s'appuyer sur un résultat de rotationnel sous contrainte car la preuve consiste en une application du lemme de Poincaré pour les 1 formes et du théorème A.14. Pour le problème de Dirichlet, on utilisera les résultats de la section 10.2. Une notion qui joue un rôle important est alors la notion de C^r-a-simple (voir définition 10.5) qui est une condition géométrique de compatibilité entre a et Ω qui est développée dans la section 10.2.

Théorème 8.6.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, connexe de bord C^∞, $r \geqslant 1$, $n = 2m+1$, $0 < h < 1$, $F = \left(F^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n}\right)$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice antisymétrique de rang $2m$. Alors, il existe $u \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F$$

dans Ω si et seulement si

(i) $F^t = -F$;

(ii) $dF = 0$ *dans* Ω*, c'est-à-dire, pour tout* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0$$

dans Ω *;*

(iii) *pour tout* $\chi \in \mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^2\right)$,

$$\int_\Omega \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} F^{ij} \chi^{ij} = 0.$$

Démonstration. L'aspect nécessaire est en tout point identique au théorème 8.1. Montrons donc l'aspect suffisant. Similairement aux preuves des théorèmes 8.1 et 8.4, on peut appliquer le lemme de Poincaré pour les 1 formes (voir théorème A.9.) Il existe donc $v \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\nabla v - (\nabla v)^t = F.$$

De plus, vu que rang$A = n-1$, il existe un vecteur non nul $a \in \mathbb{R}^n$ tel que Im$A = a^\perp$. Par le théorème A.14, il existe $\varphi \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que

$$\langle a, \nabla \varphi \rangle = - \langle a, v \rangle .$$

On pose alors $w = v + \nabla \varphi \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$. On vérifie directement que w est une solution de

$$\begin{cases} \nabla w - (\nabla w)^t = F & \text{dans } \Omega \\ \langle a, w \rangle = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Ainsi, $w(\Omega) \subset a^\perp = \mathrm{Im}A$. Par le principe de sélection (voir lemme A.17) il existe alors $u \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$Au = w.$$

On vérifie directement que u est une solution de

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F,$$

ce qui termine la démonstration du théorème. □

Remarque 8.7. (*i*) Un hypothèse qui est notablement absente est l'hypothèse qui nous garantit l'existence d'une solution du problème algébrique. C'est-à-dire, par le théorème B.4 on devrait avoir dans nos hypothèses que pour tout $\xi, \eta \in \mathrm{Ker}A$,

$$\langle F\xi, \eta \rangle = 0.$$

Or, cette hypothèse est rendue triviale du fait que F est antisymétrique et que la dimension de Ker$A$ est 1. En effet, pour tout $\xi, \eta \in \mathrm{Ker}A$, il existe $\rho_\xi, \rho_\eta \in \mathbb{R}$ tels que $\xi = \rho_\xi a$ et $\eta = \rho_\eta a$. Et alors,

$$\langle F\xi, \eta \rangle = \rho_\xi \rho_\eta \langle Fa, a \rangle = 0,$$

par antisymétrie de F.

(*ii*) Si $(x_0, c_0, C_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$ est donné, on obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions du problème

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \text{dans } \Omega \\ \nabla u(x_0) = C_0 & \\ u(x_0) = c_0. & \end{cases}$$

en ajoutant l'hypothèse $AC_0 + C_0^t A = F(x_0)$ à celles du théorème. La construction est identique à celle de la remarque 7.2

On passe maintenant au problème de Dirichlet dont l'étude est significativement différente à celle du théorème ci-dessus. Comme déjà mentionné, on aura une condition de compatibilité géométrique entre A est le domaine Ω de telle sorte à assurer la régularité des solutions. En effet, on va supposer que Ω est C^r-a-simple, c'est-à-dire (voir définition 10.5) il existe $\alpha_-, \alpha_+ \in C^r(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ tels que

$$\Omega = \cup_{x\in\Omega}]x + \alpha_-(x)\, a, x + \alpha_+(x)\, a[,$$

$\alpha_- < 0 < \alpha_+$ dans Ω et $x + \alpha_-(x)\, a, x + \alpha_+(x)\, a \in \partial\Omega$.

Théorème 8.8 (Problème de Dirichlet)**.**
Soient $n = 2m+1$, $r \geqslant 2$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *une matrice antisymétrique de rang* $2m$, $a \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\mathrm{Im}A = a^\perp$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *un ouvert borné* C^r*-a-simple avec* α_- *et* α_+, *les fonctions données par la définition de* C^r*-a-simple et* $F = \left(F^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$.

Aspect nécessaire. *Si il existe* $u \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *tel que*

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8.5}$$

alors,

(i) $F^t = -F$ *;*

(ii) $dF = 0$ *dans* Ω, *c'est-à-dire, pour tout* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0$$

dans Ω *;*

(iii) $\nu \wedge F = 0$ *sur* $\{x \in \partial\Omega \ : \ \alpha_-(x) = 0 \text{ ou } \alpha_+(x) = 0\}$, *c'est-à-dire, pour tout* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j + F^{jk}\nu^i = 0;$$

(iv) pour tout $x \in \partial\Omega$ *tel que* $\langle \nu(x), a\rangle = 0$ *et pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sum_{j=1}^n F^{ij}(x)\, a^j = 0.$$

(v) pour tout $x \in \Omega$ *et pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \sum_{j=1}^n F^{ij}(x + ta)\, a^j dt = 0.$$

Aspect suffisant. *Si les conditions (i) à (v) ci dessus sont vérifiées, alors, il existe* $u \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, *une solution de* (8.5).

Aspect nécessaire et suffisant. *Si de plus* Ω *est* C^r*-a-simple jusqu'au bord, c'est-à-dire* $\alpha_-, \alpha_+ \in C^r\left(\overline{\Omega}\right)$, *alors, il existe* $u \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *une solution de* (8.5) *si et seulement si les conditions (i) à (v) ci dessus sont vérifiées.*

Démonstration. Il s'agit d'une application du théorème 10.10. Commençons par l'aspect nécessaire. Le fait que (i) est vérifiée est évident. Soit donc $u \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ et posons $v = Au$. Remarquons alors que $\langle v, a\rangle = 0$ dans Ω. Le théorème 10.10 nous donne alors le résultat.

Passons à l'aspect suffisant. Le théorème 10.10 garantit l'existence de $v \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ telle que

$$\begin{cases} \nabla v - (\nabla v)^t = F & \text{dans } \Omega \\ \langle v, a\rangle = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Or, vu que $\text{Im}A = a^{\perp}$, ceci implique que $v(\Omega) \subset \text{Im}A$. Ainsi, par le lemme A.17, il existe $u \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que $Au = v$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. On vérifie alors directement que u est une solution de (8.5). Pour finir, si on suppose de plus que Ω est C^r-a-simple jusqu'au bord, alors l'aspect nécessaire découle de la première partie du théorème. Pour l'aspect suffisant, la construction est la même que ci-dessus, mais par le théorème 10.10, on obtient une solution $u \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$.

□

Remarque 8.9.
Intéressons nous à l'unicité des solutions dans le cas où rang$A = 2m = n-1$ à l'aide d'un exemple. Prenons Ω simplement connexe et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, l'équation $A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0$ devient

$$\begin{aligned} u^1_{x_1} + u^2_{x_2} &= 0 \\ u^1_{x_3} &= 0 \\ u^2_{x_3} &= 0, \end{aligned}$$

qui est équivalent à l'existence de $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ tel que

$$u = \left(-\varphi_{x_2}, \varphi_{x_1}, u^3\right).$$

On retrouve alors un comportement similaire à ce qu'on a observé dans le cas où A est inversible, mais à une moindre dimension. En effet, on a

$$\begin{pmatrix} -\varphi_{x_2} \\ \varphi_{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{x_1} \\ \varphi_{x_2} \end{pmatrix} = J^{-1}\nabla\varphi$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

est la sous matrice 2×2 de A qui est inversible. De plus, la liberté en u^3 vient du fait que $Ae^3 = 0$.

Si maintenant on ajoute la condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient que $A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0$ est équivalent à $u = \lambda(x) e^3$ avec $\lambda \colon \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lambda = 0$ sur $\partial\Omega$. En effet, vu que Ω est borné, pour tout (x_1, x_2), il existe x_3 tel que $(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega$. Ainsi, on a que $\nabla\varphi(x_1, x_2) = \nabla\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left(u^1, u^2\right)(x_1, x_2, x_3) = 0$.

On propose d'étudier un cas qui a été notre problème modèle en étudiant le cas où A est antisymétrique. Mais avant, il nous faut introduire une notation.

Notation 8.10.
Soit $m \leqslant n/2$. On définit $J_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ par

$$J_m = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

où le bloc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ apparaît m fois. On a que $J_m^t = -J_m$ et $\operatorname{rang} J_m = 2m$. En particulier, si $n = 2m$, alors J_m est inversible et $J_m^{-1} = -J_m$.

On va maintenant s'intéresser au problème $J_m \nabla u + (\nabla u)^t J_m = F$ qui est équivalent, en identifiant les objets apparaissant à des formes différentielles à résoudre $d(w \lrcorner \omega_m) = f$, où ω_m est la forme symplectique standard de rang $2m$, c'est-à-dire,

$$\omega_m = \sum_{i=1}^{m} dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}.$$

Corollaire 8.11 (Problème modèle, cas non dégénéré)**.**
Soient $n = 2m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contractile de bord C^∞, $r \geqslant 2$, $0 < h < 1$ et $F = \left(F^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n}\right)$. Alors, il existe $u \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$J_m \nabla u + (\nabla u)^t J_m = F$$

si et seulement si

(i) $F^t = -F$ dans Ω ;

(ii) $dF = 0$ dans Ω, c'est-à-dire, pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0$$

dans Ω.

Démonstration. Le résultat découle directement du théorème 8.1, et comme Ω est contractile, on a $\mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^2\right) = \{0\}$. □

Corollaire 8.12 (Problème modèle, cas dégénéré)**.**
Soient $n = 2m + 1$, $r \geqslant 2$, $O \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un ouvert contractile dont le bord est C^∞, $\beta_-, \beta_+ \in C^r\left(\overline{O}\right)$ tels que $\beta_- < \beta_+$ sur O. Soit alors

$$\Omega = \{x = (\hat{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \hat{x} \in O \text{ et } \beta_-(\hat{x}) < x_n < \beta_+(\hat{x})\}$$

et $F = \left(F^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n}\right)$. Alors, il existe $u \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\begin{cases} J_m \nabla u + (\nabla u)^t J_m = F & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

si et seulement si

(i) $F^t = -F$ dans Ω ;

(ii) $dF = 0$ dans Ω ;

(iii) $\nu \wedge F = 0$ sur $\{x \in \partial\Omega \ : \ x_n = \beta_-(\hat{x}) \text{ ou } x_n = \beta_+(\hat{x})\}$;

(iv) pour tout $\hat{x} \in \partial O$, $\beta_-(\hat{x}) \leqslant x_n \leqslant \beta_+(\hat{x})$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$F^{in}(x) = 0;$$

(v) pour tout $\hat{x} \in O$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_{\beta_-(\hat{x})}^{\beta_+(\hat{x})} F^{in}(\hat{x}, t)\, dt = 0.$$

Démonstration. Par l'exemple 10.7, Ω ainsi défini est C^r-e^n-simple jusqu'au bord, où $e^n = (0, ..., 0, 1)$, avec $\alpha_-(x) = \beta_-(\hat{x}) - x_n$ et $\alpha_+(x) = \beta_+(\hat{x}) - x_n$. De plus, $\operatorname{Im} J_m = (e^n)^\perp$. En effet, $\operatorname{Im} J_m$ est un espace de dimension $2m$ et donc $(\operatorname{Im} J_m)^\perp$ est un espace de dimension $n - 2m = 1$. De plus, $J_m e^n = 0$, d'où, $(\operatorname{Im} J_m)^\perp$ est l'espace généré par e^n. On voit alors aisément que les hypothèses ici correspondent aux hypothèses du théorème 8.8 qui nous donne l'aspect nécessaire et suffisant de nos conditions. □

8.3 Le cas général

Dans cette section, on permet à A de prendre n'importe quel rang. On est en mesure de donner le résultat pour le problème sans contrainte dans une boule. On n'a pas encore de résultat satisfaisant pour le problème de Dirichlet.

Théorème 8.13.
Soit $\Omega = B_R(0)$ une boule, $r \geqslant 1$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice antisymétrique et $F = \left(F^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r\left(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$. Alors, il existe $u \in C^r\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F \tag{8.6}$$

si et seulement si

(i) $F = -F^t$ *dans* Ω *;*

(ii) $dF = 0$ *dans* Ω*, c'est-à-dire, pour tout* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$*,*

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0$$

dans Ω *;*

(iii) pour tout $\xi, \eta \in \mathrm{Ker}A$*,*

$$\langle F\xi, \eta\rangle = 0$$

dans Ω*.*

Démonstration. Commençons par l'aspect nécessaire. Les points (i) et (ii) se démontrent exactement de la même façon que dans le théorème 8.1. Le point (iii) est une conséquence du théorème B.4.

Passons à l'aspect suffisant. On sépare la démonstration en deux étapes. On commence par montrer le résultat dans le cas où A est de la forme

$$\begin{bmatrix} A_{2m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où $A_{2m} \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$ est inversible. Ensuite, on se ramènera au problème sous ces hypothèses en utilisant la proposition B.8.

Étape 1 : On montre le résultat sous l'hypothèse supplémentaire que il existe $0 \leqslant m \leqslant n/2$ et $A_{2m} \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$ tel que A_{2m} est inversible et

$$A = \begin{bmatrix} A_{2m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sous cette hypothèse supplémentaire, on a que $\mathrm{Ker}A = \mathrm{span}\left(e^{2m+1}, ..., e^n\right)$ où $e^1, ..., e^n$ est la base canonique standard de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, l'hypothèse (iii) se lit

$$F^{ij} = 0$$

dans Ω pour tout $2m+1 \leqslant i, j \leqslant n$. Ceci, avec (ii) nous donne que toutes les hypothèses du théorème 10.4 sont vérifiées et il existe donc $v \in C^r\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla v - (\nabla v)^t = F & \text{dans } \Omega \\ v^{2m+1} = ... = v^n = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Or, $v^{2m+1} = ... = v^n = 0$ implique que $v(\Omega) \subset \mathbb{R}^{2m} \times \{0\} \times ... \times \{0\}$. De plus, vu que A_{2m} est inversible, on a que $\mathrm{Im}A = \mathbb{R}^{2m} \times \{0\} \times ... \times \{0\}$. Ainsi, on peut appliquer le principe de sélection (voir lemme A.17) et il existe $u \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tel que $Au = v$. On vérifie directement que u ainsi défini est une solution de (8.6).

Étape 2 : On montre le résultat dans le cas général.

Soit $2m = \operatorname{rang} A$. Alors, par la proposition B.8, il existe P une matrice orthogonale et $A_{2m} \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$ une matrice inversible telles que

$$PAP^t = \begin{bmatrix} A_{2m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := \tilde{A}.$$

Définissons $\psi\colon B_R(0) \to B_R(0)$ par

$$\psi(x) = P^t x.$$

Du fait que P est une matrice orthogonale, $\psi \in \operatorname{Diff}^\infty(B_R(0), B_R(0))$ est une isométrie. Par (i), on peut identifier F à une 2 forme $f \in C^r(\Omega, \Lambda^2)$ en définissant

$$f = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} F^{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

On définit $\tilde{f} = \psi^*(f) \in C^r(B_R(0), \Lambda^2)$, et $\tilde{F} = \left(\tilde{F}^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r(B_R(0), \mathbb{R}^{n\times n})$ par

$$\tilde{F}(x) = PF\left(P^t x\right) P^t.$$

On montre maintenant que si on identifie $\tilde{F}$ à une 2 forme, comme on le fait pour F, on obtient $\tilde{f}$. En effet, l'idée est de montrer que les hypothèse du théorème sont vérifiées pour $\tilde{A}$ et $\tilde{F}$. Or montrer que $\tilde{F}$ vérifie (ii) devient trivial dès qu'on voit qu'il est donné par $\psi^*(f)$. On a

$$\begin{aligned}
\tilde{f} &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(F^{ij} \circ \psi\right) d\psi^i \wedge d\psi^j \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(F^{ij} \circ \psi\right) \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial \psi^i}{\partial x_\alpha} dx^\alpha \wedge \frac{\partial \psi^j}{\partial x_\beta} dx^\beta \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(F^{ij} \circ \psi\right) \sum_{1\leqslant \alpha<\beta\leqslant n} \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \psi^j}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \psi^j}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \psi^i}{\partial x_\beta}\right) dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \sum_{1\leqslant \alpha<\beta\leqslant n} \left[\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(F^{ij} \circ \psi\right) \frac{\partial \psi^i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \psi^j}{\partial x_\beta} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(F^{ij} \circ \psi\right) \frac{\partial \psi^j}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \psi^i}{\partial x_\beta}\right] dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&\overset{(i)}{=} \sum_{1\leqslant \alpha<\beta\leqslant n} \left[\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(F^{ij} \circ \psi\right) \frac{\partial \psi^i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \psi^j}{\partial x_\beta} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \left(F^{ij} \circ \psi\right) \frac{\partial \psi^i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \psi^j}{\partial x_\beta}\right] dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \sum_{1\leqslant \alpha<\beta\leqslant n} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(F^{ij} \circ \psi\right) \frac{\partial \psi^i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \psi^j}{\partial x_\beta}\right] dx^\alpha \wedge dx^\beta.
\end{aligned}$$

Or, $\frac{\partial \psi^i}{\partial x_\alpha} = P^{\alpha i}$, ainsi,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{1\leqslant \alpha<\beta\leqslant n} \sum_{i,j=1}^{n} F^{ij}\left(P^t x\right) P^{\alpha i} P^{\beta j} dx^\alpha \wedge dx^\beta. \tag{8.7}$$

D'un autre côté

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^{\alpha\beta} &= \left(PF\left(P^t x\right) P^t\right)^{\alpha\beta} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} P^{\alpha i} F^{ij}\left(P^t x\right) \left(P^t\right)^{j\beta} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} F^{ij}\left(P^t x\right) P^{\alpha i} P^{\beta^i},
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\tilde{f}$ est la 2 forme qui représente $\tilde{F}$ et donc, vu que (ii) est équivalent à $df = 0$, on a que $d\tilde{F} = d\tilde{f} = d\psi^* (f) = \psi^* (df) = 0$ dans Ω. Considérons maintenant $\xi, \eta \in \operatorname{Ker}\tilde{A}$, Alors,

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{F}\xi, \eta \right\rangle &= \left\langle PFP^t\xi, \eta \right\rangle \\ &= \left\langle FP^t\xi, P^t\eta \right\rangle.\end{aligned}$$

Or, $AP^t\xi = P^t\tilde{A}\xi = 0$ et $AP^t\eta = P^t\tilde{A}\eta = 0$, et donc $P^t\xi, P^t\eta \in \operatorname{Ker}A$ et on déduit de (iii)

$$\left\langle \tilde{F}\xi, \eta \right\rangle = 0.$$

Ainsi, par l'étape 1, il existe $v \in C^r (\Omega, \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\tilde{A}\nabla v + (\nabla v)^t \tilde{A} = \tilde{F}.$$

Définissons finalement $u \in C^r (B_R (0), \mathbb{R}^n)$ par

$$u (x) = P^t v (Px),$$

de telle sorte que $\nabla u = P^t\nabla v (Px) P$. Pour finir, on a alors

$$\begin{aligned}A\nabla u (x) + (\nabla u (x))^t A =& AP^t\nabla v (Px) P + P^t (\nabla v (Px))^t PA \\ =& P^t \left(PAP^t\nabla v (Px) + (\nabla v (Px))^t PAP^t\right) P \\ =& P^t \left(\tilde{A}\nabla v + (\nabla v)^t \tilde{A}\right) P \\ =& P^t\tilde{F} (Px) P \\ =& P^tPF (x) P^tP = F (x),\end{aligned}$$

ce qui montre que u est une solution de (8.6) et termine la démonstration du théorème. □

Remarque 8.14.
Si $(x_0, c_0, C_0) \in B_R (0) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$ sont donnés, on obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution du problème

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla u (x_0) = 0 & \\ u (x_0) = 0. & \end{cases}$$

en ajoutant l'hypothèse $AC_0 + C_0^tA = F (x_0)$ à celles du théorème. Remarquons que contrairement au cas où A est symétrique (voir remarque 7.2), l'hypothèse $AC_0 + C_0^tA = F (x_0)$ ne vient pas remplacer l'hypothèse (iii). En effet, $AC_0 + C_0^tA = F (x_0)$ implique que l'hypothèse (iii) est vérifiée en x_0, mais on a besoin qu'elle soit vérifiée dans tout Ω.

Chapitre 9

Le cas général

On s'intéresse finalement au cas où on abandonne toute hypothèse de symétrie sur A. Dans ce cas là, étudier l'équation

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F$$

est équivalent, en identifiant partie symétrique et antisymétrique, à étudier

$$\begin{cases} A_s \nabla u + (\nabla u)^t A_s = F_s \\ A_a \nabla u + (\nabla u)^t A_a = F_a \end{cases}$$

où, pour toute matrice M, $M_s = \frac{1}{2}(M + M^t)$ dénote la partie symétrique de M et $M_a = \frac{1}{2}(M - M^t)$ dénote la partie antisymétrique de M. On peut donc utiliser certains résultats des chapitres 7 et 8. Néanmoins, on aura en plus besoin d'une condition de compatibilité pour avoir que les deux équations du système admettent une solution en commun. Cette condition de compatibilité fait intervenir l'inverse de A_s, on a donc des conditions suffisantes sous l'hypothèse que la partie symétrique de A est inversible.

Théorème 9.1.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et de bord C^∞, $r \geqslant 2$ un entier, $F = \left(F^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Soit encore $(M_s)_k = \left((M_s)_k^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^{r-1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ défini par

$$(M_s)_k^{ij} = (F_s)_{x_j}^{ik} - (F_s)_{x_i}^{jk}.$$

***Aspect nécessaire.** Si il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ une solution de*

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = F \tag{9.1}$$

dans Ω, alors

(i) il existe $x_0 \in \Omega$ et $C_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tels que

$$AC_0 + C_0^t A = F(x_0);$$

(ii) pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,

$$(F_s)_{x_j x_l}^{ik} - (F_s)_{x_i x_l}^{jk} + (F_s)_{x_i x_k}^{jl} - (F_s)_{x_j x_k}^{il} = 0$$

dans Ω ;

(iii) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_N(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_\Omega (M_s)_k^{ij} \chi^k = 0 \tag{9.2}$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega} (M_s)_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{N}[\chi^j] = -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} F_s^{ij} \chi^j; \tag{9.3}$$

Aspect nécessaire et suffisant. *Si de plus* A_s *est inversible et qu'il existe* $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *une solution de* (9.1), *alors,*

(iv) pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$2\frac{\partial}{\partial x_k} F_a = A_a A_s^{-1} (M_s)_k - (M_s)_k A_s^{-1} A_a + A_a A_s^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} F_s\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} F_s\right) A_s^{-1} A_a,$$

dans Ω.

Réciproquement, si les conditions (i) à (iv) sont vérifiées, alors, il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *une solution de* (9.1).

Pour finir, toujours sous l'hypothèse que A_s *est inversible, les solutions de*

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0$$

sont données par des fonctions affines $u(x) = Cx + c$ *où* C *est une matrice qui vérifie* $AC + C^t A = 0$ *et* $c \in \mathbb{R}^n$ *est quelconque.*

Démonstration. Avant de commencer la preuve rappelons qu'en identifiant partie symétrique et antisymétrique, on a que l'équation (9.1) est équivalente au système

$$\begin{cases} A_s \nabla u + (\nabla u)^t A_s = F_s \\ A_a \nabla u + (\nabla u)^t A_a = F_a. \end{cases} \tag{9.4}$$

Passons à le preuve de l'aspect nécessaire. Soit donc $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, une solution de (9.4). En posant $C_0 = \nabla u(x_0)$, (i) est trivialement vérifiée. Les conditions (ii) et (iii) découlent du théorème 7.1. Supposons donc maintenant que A_s est inversible et montrons que (iv) est vérifiée. Posons $v = A_s u$ de telle sorte que $F_s = \nabla v + (\nabla v)^t$. On a alors

$$\begin{aligned}\left((M_s)_k + \frac{\partial}{\partial x_k} F_s\right)^{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_j} F_s^{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} F_s^{jk} + \frac{\partial}{\partial x_k} F_s^{ij} \\ &= v^i_{x_j x_k} + v^k_{x_i x_j} - v^j_{x_i x_k} - v^k_{x_i x_j} + v^i_{x_j x_k} + v^j_{x_i x_k} \\ &= 2\frac{\partial}{\partial x_k} v^i_{x_j} = 2\frac{\partial}{\partial x_k} (\nabla v)^{ij}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left((M_s)_k - \frac{\partial}{\partial x_k} F_s\right)^{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_j} F_s^{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} F_s^{jk} - \frac{\partial}{\partial x_k} F_s^{ij} \\ &= v^i_{x_j x_k} + v^k_{x_i x_j} - v^j_{x_i x_k} - v^k_{x_i x_j} - v^i_{x_j x_k} - v^j_{x_i x_k} \\ &= -2\frac{\partial}{\partial x_k} (\nabla v)^{ji}.\end{aligned}$$

Ainsi, vu que $\nabla u = A_s^{-1} \nabla v$, on a que

$$\begin{aligned}2\frac{\partial}{\partial x_k} F_a &= 2\frac{\partial}{\partial x_k} \left[A_a \nabla u + (\nabla u)^t A_a\right] \\ &= 2\frac{\partial}{\partial x_k} \left[A_a A_s^{-1} \nabla v + (\nabla v)^t A_s^{-1} A_a\right]\end{aligned}$$

$$=A_a A_s^{-1}\left((M_s)_k + \frac{\partial}{\partial x_k}F_s\right) - \left((M_s)_k - \frac{\partial}{\partial x_k}F_s\right)A_s^{-1}A_a$$
$$=A_a A_s^{-1}(M_s)_k - (M_s)_k A_s^{-1}A_a + A_a A_s^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}F_s\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}F_s\right)A_s^{-1}A_a$$

ce qui établit (iv).

Passons à l'aspect suffisant. En prenant la partie symétrique de (i), on obtient en particulier que

$$A_s C_0 + C_0^t A_s = F_s(x_0). \tag{9.5}$$

Ainsi, par le théorème B.4, on a que pour tout $\xi, \eta \in \mathrm{Ker}A_s$, $\langle F_s(x_0)\xi, \eta\rangle = 0$. On observe donc que toutes les hypothèses du théorème 7.1 sont vérifiées pour A_s et F_s. Par conséquent, il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ une solution de

$$A_s \nabla u + (\nabla u)^t A_s = F_s.$$

De plus, par (9.5) et la remarque 7.2, on peut supposer que $\nabla u(x_0) = C_0$. Montrons maintenant que

$$A_a \nabla u + (\nabla u)^t A_a = F_a.$$

Pour ceci, on pose $v = A_s u$, et on montre que

$$A_a A_s^{-1}\nabla v + (\nabla v)^t A_s^{-1} A_a = F_a.$$

Or, par définition, v vérifie

$$\nabla v + (\nabla v)^t = F_s.$$

Ainsi, par le même calcul que ci-dessus, on a pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$

$$(M_s)_k + \frac{\partial}{\partial x_k}F_s = 2\frac{\partial}{\partial x_k}\nabla v$$
$$(M_s)_k - \frac{\partial}{\partial x_k}F_s = -2\frac{\partial}{\partial x_k}(\nabla v)^t.$$

On en déduit que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$2\frac{\partial}{\partial x_k}F_a \overset{(iv)}{=} A_a A_s^{-1}\left((M_s)_k + \frac{\partial}{\partial x_k}F_s\right) - \left((M_s)_k - \frac{\partial}{\partial x_k}F_s\right)A_s^{-1}A_a$$
$$=A_a A_s^{-1} 2\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\nabla v\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(\nabla v)^t\right)A_s^{-1}A_a$$
$$=2\frac{\partial}{\partial x_k}\left[A_a A_s^{-1}\nabla v + (\nabla v)^t A_s^{-1}A_a\right].$$

De ceci, on déduit qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que

$$A_a A_s^{-1}\nabla v + (\nabla v)^t A_s^{-1} A_a = F_a + K.$$

Or, évaluant en x_0, vu que $\nabla v(x_0) = A_s \nabla u(x_0) = A_s C_0$, on déduit que

$$A_a C_0 + C_0^t A_a = F_a(x_0) + K.$$

Ceci avec (i) implique que $K = 0$ et donc u est une solution de (9.4).

Pour terminer la preuve, il faut encore montrer que sous l'hypothèse que A_s est inversible, les solutions de

$$A\nabla u + (\nabla u)^t A = 0 \tag{9.6}$$

sont données par $u(x) = Cx + x$, avec $AC + C^t A = 0$. De façon évidente, si u est définie par $u(x) = Cx + c$, avec $AC + C^t A = 0$, u est une solution de (9.6). Réciproquement, si u est une solution de (9.6), par le théorème 7.1 u est affine. En remplaçant $u(x) = Cx + c$ dans (9.6), on obtient directement que $AC + C^t A = 0$. □

Remarque 9.2. *(i)* En réalité, dans la preuve du théorème ci-dessus, on construit une solution de

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \text{dans } \Omega \\ \nabla u(x_0) = C_0. \end{cases}$$

Ainsi, sous les mêmes hypothèses, on peut construire une solution de

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \text{dans } \Omega \\ \nabla u(x_0) = C_0 \\ u(x_0) = c_0; \end{cases}$$

(ii) On peut combiner le théorème B.6 avec ce théorème pour en obtenir d'autres versions. Par exemple, si A_s est inversible et que $F_a = A_a A_s^{-1}\frac{F_s}{2} + \frac{F_s}{2} A_s^{-1} A_a$, les conditions *(ii)* à *(iv)* sont nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution de (9.1) ;

(iii) Les conditions $dF_a = 0$,

$$\int_\Omega \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} F_a^{ij}\chi^{ij}$$

pour tout $\chi \in \mathcal{H}_N(\Omega, \Lambda^2)$ ainsi que les conditions du type $\langle G\xi, \eta\rangle = 0$ où G est F, F_s ou F_a et ξ et η sont dans les noyaux appropriés sont également nécessaires ici, mais n'apparaissent pas explicitement car elles ne sont pas utile à la démonstration de l'aspect suffisant.

Théorème 9.3 (Problème de Dirichlet)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et de bord C^∞, $r \geqslant 2$, $F = (F^{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Soit encore $(M_s)_k = \left((M_s)_k^{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in C^{r-1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ défini par

$$(M_s)_k^{ij} = (F_s)_{x_j}^{ik} - (F_s)_{x_k}^{jk}.$$

Aspect nécessaire. *Si il existe une solution $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ de*

$$\begin{cases} A\nabla u + (\nabla u)^t A = F & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{9.7}$$

alors

(i) pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,

$$(F_s)_{x_j x_l}^{ik} - (F_s)_{x_i x_l}^{jk} + (F_s)_{x_i x_k}^{jl} - (F_s)_{x_j x_k}^{il} = 0;$$

(ii) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_T(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$\sum_{k=1}^n \int_\Omega (M_s)_k^{ij}\chi^k = \int_{\partial\Omega} (F_s\nu \wedge \nu)^{ij} \langle \chi, \nu\rangle \tag{9.8}$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\sum_{j,k=1}^n \int_\Omega (M_s)_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{D}[\chi^j] + \sum_{j=1}^n \int_\Omega F_s^{ij}\chi^j = \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} (F_s\nu \wedge \nu)^{ij} \left\langle \nabla\mathcal{D}[\chi^j], \nu\right\rangle; \tag{9.9}$$

(iii) les propriétés suivantes sont vérifiées sur $\partial\Omega$,

- *pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,*

$$F_s^{ik}\nu^j\nu^l - F_s^{jk}\nu^i\nu^l + F_s^{jl}\nu^i\nu^k - F_s^{il}\nu^j\nu^k = 0; \tag{9.10}$$

- *pour tout* $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$,

$$\nu^k \frac{\partial}{\partial x_l}\left[\sum_{t=1}^{n}\left(F_s^{it}\nu^j - F_s^{jt}\nu^i\right)\nu^t\right] - \nu^l \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\sum_{t=1}^{n}\left(F_s^{it}\nu^j - F_s^{jt}\nu^i\right)\nu^t\right]$$
$$= \nu^k\left(M_s\right)_l^{ij} - \nu^l\left(M_s\right)_k^{ij}. \tag{9.11}$$

Ou, de façon plus condensée, (9.11) *s'écrit aussi*

$$\nu \wedge (M_s)^{ij} = \nu \wedge \nabla\left[(F_s\nu \wedge \nu)^{ij}\right];$$

- *si* $n \geqslant 3$, $\nu \wedge F_a = 0$, *c'est-à-dire pour tout* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F_a^{ij}\nu^k - F_a^{ik}\nu^j + F_a^{jk}\nu^i = 0, \tag{9.12}$$

et si $n = 2$,

$$\int_\Omega F_a^{12} = 0. \tag{9.13}$$

Aspect nécessaire et suffisant. *Si de plus* A_s *est inversible et qu'il existe* $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ *une solution de* (9.7), *alors,*

(iv) pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$2\frac{\partial}{\partial x_k}F_a = A_aA_s^{-1}\left(M_s\right)_k - \left(M_s\right)_k A_s^{-1}A_a + A_aA_s^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}F_s\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}F_s\right)A_s^{-1}A_a.$$

Réciproquement si les conditions (i) à (iv) sont vérifiées, alors il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, *une solution de* (9.7).

Démonstration. Commençons par remarquer que, comme dans le cas du théorème 9.1, l'existence d'une solution de (9.7) est équivalent à l'existence d'une solution de

$$\begin{cases} A_s\nabla u + (\nabla u)^t A_s = F_s & \text{dans } \Omega \\ A_a\nabla u + (\nabla u)^t A_a = F_a & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{9.14}$$

Montrons maintenant l'aspect nécessaire de nos conditions. Le théorèmes 7.3 nous donne immédiatement l'aspect nécessaire de (i), de (ii), de (9.10) et de (9.11). De plus, le théorème 9.1 nous donne que (iv) est nécessaire. Il nous reste donc à montrer que (9.12) et (9.13) sont nécessaires. Pour ceci, considérons $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ une solution de (9.14), et posons $w = A_a u$. Alors, w est une solution de

$$\begin{cases} \nabla w - (\nabla w)^t = F_a & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme dans la preuve du théorème 8.4, à partir de ceci et du lemme de Poincaré pour les 1 formes (voir théorème A.10) on déduit que (9.12) est vérifiée. De plus, si $n = 2$, on a alors par le théorème de Green,

$$\int_\Omega F_a^{12} = \int_\Omega \left(w_{x_2}^1 - w_{x_1}^2\right) = -\int_{\partial\Omega} w \cdot dl = 0,$$

ce qui montre l'aspect nécessaire de (9.13).

Passons maintenant à l'aspect suffisant. Le théorème 7.3 garantit l'existence de $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\begin{cases} A_s\nabla u + (\nabla u)^t A_s = F_s & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour voir que u est une solution de (9.14), on pose $v = A_s u$ et on montre que v est une solution de

$$A_a A_s^{-1} \nabla v + (\nabla v)^t A_s^{-1} A_a = F_a.$$

Or, par la même calcul que dans la preuve du théorème 9.1, on a que

$$\begin{aligned}(M_s)_k + \frac{\partial}{\partial x_k} F_s =& 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \nabla v \\ (M_s)_k - \frac{\partial}{\partial x_k} F_s =& -2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\nabla v)^t ,\end{aligned}$$

en effet, ceci découle du fait que $\nabla v + (\nabla v)^t = F_s$. On déduit alors, tout à fait similairement à la preuve du théorème 9.1 que

$$2 \frac{\partial}{\partial x_k} F_a \overset{(iv)}{=} 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[A_a A_s^{-1} \nabla v + (\nabla v)^t A_s^{-1} A_a \right],$$

ce qui implique qu'il existe une matrice constante et antisymétrique $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$A_a A_s^{-1} \nabla v + (\nabla v)^t A_s^{-1} A_a = F_a + K.$$

Montrons que $K = 0$. Posons $w = A_a u = A_a A_s^{-1} v$, alors, on a $w = 0$ sur $\partial\Omega$. Ainsi, si $n \geqslant 3$, on a que $\left(\nabla w - (\nabla w)^t \right) \wedge \nu = 0$ sur $\partial\Omega$. et donc,

$$K \wedge \nu = \left(\nabla w - (\nabla w)^t - F_a \right) \wedge \nu \overset{(9.12)}{=} 0.$$

Et vu que $\partial\Omega$ est C^∞ et que $n \geqslant 3$, ceci implique que $K = 0$. Si $n = 2$, alors,

$$K = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$|\Omega| k = \int_\Omega k = \int_\Omega \left(w^1_{x_2} - w^2_{x_1} - F_a^{12} \right) \overset{(9.13)}{=} \int_\Omega \left(w^1_{x_2} - w^2_{x_1} \right) = - \int_{\partial\Omega} w \cdot dl = 0,$$

où on a utilisé le théorème de Green et le fait que $w = 0$ sur $\partial\Omega$. Ainsi, on a montré que $k = 0$ et par conséquent $K = 0$, ce qui termine de montrer que u est une solution de (9.14). Pour finir la preuve, il nous faut discuter l'unicité. Or, l'unicité découle du théorème 7.3.

□

Corollaire 9.4 (Problème modèle $A = \lambda I + \mu J_m$)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert simplement connexe de bord C^∞, $r \geqslant 2$, $m \leqslant n/2$ des entiers, $\lambda \neq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ des réels et $A = \lambda I + \mu J_m$ et $F \in C^r \left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n} \right)$ tel que

$$2\lambda F_a = \mu \left(J_m F_s + F_s J_m \right) \tag{9.15}$$

dans Ω. Soit encore $(M_s)_k = \left((M_s)^{ij}_k \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^{r-1} \left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n} \right)$ défini par

$$(M_s)^{ij}_k = (F_s)^{ik}_{x_j} - (F_s)^{jk}_{x_k}.$$

Alors, il existe $u \in C^{r+1} \left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n \right)$ tel que

$$A \nabla u + (\nabla u)^t A = F$$

dans Ω si et seulement si

(i) pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$*,*

$$(F_s)^{ik}_{x_j x_l} - (F_s)^{jk}_{x_i x_l} + (F_s)^{jl}_{x_i x_k} - (F_s)^{il}_{x_j x_k} = 0$$

dans Ω *;*

(ii) pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$*,*

$$\mu \left(J_m \left(M_s\right)_k - \left(M_s\right)_k J_m\right) = 0,$$

dans Ω*.*

Démonstration. Commençons par l'aspect nécessaire. Par le théorème 9.1, (i) est vérifiée et on a

$$2\lambda \frac{\partial}{\partial x_k} F_a = \mu \left(J_m \left(M_s\right)_k - \left(M_s\right)_k J_m + J_m \frac{\partial}{\partial x_k} F_s + \frac{\partial}{\partial x_k} F_s J_m \right).$$

Ceci combiné à (9.15) nous donne (ii), et termine la démonstration de l'aspect nécessaire.

Passons à l'aspect suffisant. On propose d'utiliser le théorème 9.1. Par le théorème B.6, l'hypothèse (i) du théorème 9.1 est vérifiée. De plus, par le même calcul que ci-dessus, l'hypothèse (iv) du théorème 9.1 est vérifiée. La dernière hypothèse du théorème 9.1 qui reste à vérifier est rendue triviale du fait que Ω est simplement connexe. □

Remarque 9.5.
Si on pose $\mu = 0$ dans le résultat ci-dessus, (9.15) implique que $F_a = 0$, c'est à dire $F^t = F$, et (ii) est triviale. Ainsi, on retrouve les hypothèses de l'équation du gradient symétrisé (voir corollaire 7.4.)

Chapitre 10

Les équations du gradient et du rotationnel sous contrainte

On regroupe ici les résultats qui sont essentiellement des cas du lemme de Poincaré pour les 0 ou 1 formes sous contrainte. La contrainte $u(\Omega) \subset S$ où S est un espace vectoriel dans le cas du gradient et une ou plusieurs contraintes du type $\langle a, u \rangle = 0$ dans le cas du rotationnel.

10.1 L'équation du gradient sous contrainte

Théorème 10.1 (Équation du gradient sous contrainte)**.**
Soient $r \geqslant 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe de bord C^∞, $F \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ et $S \subset \mathbb{R}^n$ un sous espace vectoriel.

Alors, il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla u = F & \text{dans } \Omega \\ u(\Omega) \subset S \end{cases} \tag{10.1}$$

si et seulement si

(i) pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} = F^{ik}_{x_j};$$

(ii) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_N(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega F^{ij} \chi^j = 0;$$

(iii) pour tout $x \in \Omega$,

$$S^\perp \subset \operatorname{Ker} F(x)^t.$$

Démonstration. Commençons par l'aspect nécessaire. Supposons qu'il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ une solution de (10.1). Alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\nabla u^i = (F^{i1}, ..., F^{in})$. D'où, par le lemme de Poincaré pour les 0 formes (voir théorème A.9) les conditions (i) et (ii) sont vérifiées. Il nous reste à montrer (iii). Soit donc $z \in S^\perp$. On a pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $x \in \Omega$

$$\left(F^t(x)\, z\right)^i = \sum_{j=1}^{n} F^{ji} z^j = \sum_{j=1}^{n} u^j_{x_i} z^j = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u(x), z \rangle = 0$$

vu que $u(x) \in S$.

Passons à l'aspect suffisant.

Par le lemme de Poincaré pour les 0 formes (voir théorème A.9) il existe $v^i \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que $\nabla v^i = (F^{i1}, ..., F^{in})$. Définissons $\varphi \colon S^\perp \times \Omega \to \mathbb{R}$ définit par

$$\varphi(z, x) = \langle v(x), z\rangle .$$

Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\langle v(x), z\rangle\right] = \sum_{j=1}^n v^j_{x_i} z^j = \left(F^t(x)\, z\right)^i = 0,$$

vu que par hypothèse, $z \in S^\perp$ implique $z \in \operatorname{Ker} F(x)^t$. Ainsi, φ est indépendante de x. Et vu qu'elle est linéaire en z, il existe une constante $c \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\varphi(z) = \langle c, z\rangle .$$

Définissons maintenant $u = v - c$. Alors, u est une solution de (10.1). En effet, pour tout $x \in \Omega$ et $z \in S^\perp$,

$$\langle u(x), z\rangle = \langle v(x), z\rangle - \langle c, z\rangle = 0,$$

d'où, $u(x) \in \left(S^\perp\right)^\perp = S$. □

Remarque 10.2.
Étant donné $(x_0, c_0) \in \Omega \times S$, on peut, sous les mêmes hypothèses que celles du théorème ci-dessus, construire une solution de

$$\begin{cases} \nabla u = F & \text{dans } \Omega \\ u(x_0) = c_0 & \\ u(\Omega) \subset S. & \end{cases}$$

Théorème 10.3 (Équation du gradient sous contrainte, problème de Dirichlet)**.**
Soient $r \geqslant 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe, de bord C^1, $F \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $g \in C^{r+1}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $S \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel. Alors, il existe $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla u = F & \textit{dans } \Omega \\ u = g & \textit{sur } \partial\Omega \\ u\left(\overline{\Omega}\right) \subset S & \end{cases} \tag{10.2}$$

si et seulement si

(i) pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} = F^{ik}_{x_j};$$

(ii) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_T(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\sum_{j=1}^n \int_\Omega F^{ij}\chi^j = \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} g\nu^j\chi^j;$$

(iii) pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$F^{ij} - g^i_{x_j} = \sum_{k=1}^n \left(F^{ik} - g^i_{x_k}\right)\nu^k\nu^j,$$

ou de façon plus condensée,

$$F - \nabla g = (F - \nabla g)\,\nu \otimes \nu$$

sur $\partial\Omega$.

(iv) g vérifie

$$g(\partial\Omega) \subset S$$

(v) pour tout $x \in \Omega$,

$$S^{\perp} \subset \mathrm{Ker} F(x)^t.$$

Démonstration. Commençons par l'aspect nécessaire.

Supposons que $u \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ soit une solution de (10.2). En particulier, on a alors que u est une solution de

$$\begin{cases} \nabla u^i = \left(F^{i1}, ..., F^{in}\right) := F^{i,*} & \text{dans } \Omega \\ u^i = g^i & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ainsi par le lemme de Poincaré pour les 0 formes (voir théorème A.10), (i) et (ii) sont vérifiées. De plus,

$$\nabla g^i \wedge \nu = F^{i,*} \wedge \nu$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ sur $\partial\Omega$, c'est-à-dire,

$$g^i_{x_j}\nu^k - g^i_{x_k}\nu^j = F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j,$$

pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$. Ainsi, pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$\left((F - \nabla g)\,\nu \otimes \nu\right)^{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(F^{ik} - g^i_{x_k}\right)\nu^j\nu^k = \left(F^{ij} - g^i_{x_j}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\nu^k\right)^2 = (F - \nabla g)^{ij},$$

ce qui montre (iii). Le fait que S est un sous-espace vectoriel de dimension finie implique qu'il est fermé et on obtient (iv) par continuité de u. Pour finir, soit $z \in S^{\perp}$. On a pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $x \in \Omega$

$$\left(F^t(x)\,z\right)^i = \sum_{j=1}^{n} F^{ji}z^j = \sum_{j=1}^{n} u^j_{x_i}z^j = \frac{\partial}{\partial x_i}\langle u(x), z\rangle = 0$$

vu que $u(x) \in S$.

Passons à l'aspect suffisant.

Commençons par montrer que pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$

$$g^i_{x_j}\nu^k - g^i_{x_k}\nu^j = F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j.$$

On a pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} g^i_{x_j}\nu^k - g^i_{x_k}\nu^j &= F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j - \left(F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j - g^i_{x_j}\nu^k + g^i_{x_k}\nu^j\right) \\ &= F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j + \left(F^{ik} - g^i_{x_k}\right)\nu^j - \left(F^{ij} - g^i_{x_j}\right)\nu^k \\ &\overset{(iii)}{=} F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j + \sum_{t=1}^{n}\left(F^{it} - g^i_{x_t}\right)\nu^t\nu^k\nu^j - \sum_{t=1}^{n}\left(F^{it} - g^i_{x_t}\right)\nu^t\nu^j\nu^k \\ &= F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j, \end{aligned}$$

qui est ce qu'on voulait montrer. Le lemme de Poincaré pour les 0 formes nous garantit alors l'existence de $u \in C^{r+1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla u = F & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il nous reste à montrer que $u(\Omega) \subset S$. Soit maintenant $z \in S^{\perp}$. Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle u(x), z\rangle = \sum_{j=1}^{n} u^j_{x_i}(x)\,z^j = F^{ji}(x)\,z^j = \left(F^t(x)\,z\right) = 0.$$

D'où, il existe une constante c_z indépendante de x telle que

$$\langle u(x), z\rangle = c_z.$$

Or, par continuité de u, on a, si $x_0 \in \partial\Omega$,

$$c_z = \lim_{x \to x_0} \langle u(x), z\rangle = \langle g(x_0), z\rangle = 0$$

par (iv).

Ainsi,

$$u(\Omega) \subset \left(S^{\perp}\right)^{\perp} = S.$$

Ceci termine la preuve du théorème. □

10.2 L'équation du rotationnel sous contrainte

Dans cette section on s'intéresse à résoudre l'équation

$$\nabla u - \nabla u^t = F$$

d'abord sous une contrainte du type $u^{l+1} = ... = u^n = 0$, qui est similaire à la contrainte sous laquelle on résout l'équation du gradient. Puis, on résout l'équation sous les contraintes $\langle a, u\rangle = 0$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

10.2.1 L'équation sous plusieurs contraintes

Théorème 10.4.
Soit $R > 0$, $r \geqslant 2$, $0 \leqslant l \leqslant n$, $\Omega = B_R(0)$ une boule centrée en 0 et $F = \left(F^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^r\left(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n}\right)$.

Alors, il existe $u \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ une solution de

$$\begin{cases} \nabla u - (\nabla u)^t = F & \textit{dans } \Omega \\ u^{l+1} = ... = u^n = 0 & \textit{dans } \Omega \end{cases}$$

si et seulement si

(i) $F^t = -F$ *dans* Ω *;*

(ii) *tout* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0$$

dans Ω *;*

(iii) *pour tout* $l + 1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$F^{ij} = 0$$

dans Ω.

Démonstration. L'aspect nécessaire est trivial. Montrons donc l'aspect suffisant. On procède par récurrence sur n. Si $n = l$, le résultat est une application directe du lemme de Poincaré pour les 1 formes (voir théorème A.11.) Supposons donc que le résultat est vrai en dimension strictement plus petite que n.

Soit $\tilde{B}_R(0)$, la boule centrée en 0 de rayon R en dimension $n-1$. Définissons $\tilde{F} = \left(\tilde{F}^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} \in C^r\left(\tilde{B}_R(0), \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}\right)$ par

$$\tilde{F}(y) = F(y, 0).$$

Alors, pour $1 \leqslant i, j, k \leqslant n-1$, et $y \in \tilde{B}_R(0)$,

$$\left(\tilde{F}^{ij}_{y_k} - \tilde{F}^{ik}_{y_j} + \tilde{F}^{jk}_{y_i}\right)(y) = \left(F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i}\right)(y,0) = 0.$$

De plus, pour tout $l+1 \leqslant i, j \leqslant n-1$

$$\tilde{F}^{ij} = F^{ij} = 0.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe $\alpha \in C^r\left(\tilde{B}_R(0), \mathbb{R}^{n-1}\right)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla\alpha - (\nabla\alpha)^t = \tilde{F} & \text{dans } \tilde{B}_R(0) \\ \alpha^{l+1} = ... = \alpha^{n-1} = 0 & \text{dans } \tilde{B}_R(0) \end{cases}$$

Pour $x \in B_R(0)$, maintenant, on écrit $x = (\tilde{x}, x_n)$ avec $\tilde{x} = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \tilde{B}_R(0)$ et on définit $u \in C^r(B_R(0), \mathbb{R}^n)$ en posant, pour $x \in B_R(0)$ et $1 \leqslant i \leqslant l$,

$$u^i(x) = \alpha^i(\tilde{x}) + \int_0^{x_n} F^{in}(\tilde{x}, t)\, dt$$

et $u^i = 0$ pour $l+1 \leqslant i \leqslant n$. Alors, pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant l$ et $x \in B_R(0)$, on a

$$\begin{aligned} u^i_{x_j}(x) - u^j_{x_i}(x) =& \underbrace{\alpha^i_{y_j}(\tilde{x}) - \alpha^j_{y_i}(\tilde{x})}_{=\tilde{F}^{ij}(\tilde{x})} + \int_0^{x_n} \underbrace{\left(F^{in}_{x_j} - F^{jn}_{x_i}\right)}_{\overset{(ii)}{=} F^{ij}_{x_n}}(\tilde{x}, t)\, dt \\ =& F^{ij}(\tilde{x}, 0) + \int_0^{x_n} \frac{d}{dt}\left[F^{ij}(\tilde{x}, t)\right] dt \\ =& F^{ij}(x). \end{aligned}$$

De plus, pour $1 \leqslant i \leqslant l$, $l+1 \leqslant j \leqslant n$ et $x \in B_R(0)$, on a

$$\begin{aligned} u^i_{x_j}(x) - u^j_{x_i}(x) =& u^i_{x_j}(x) \\ =& \alpha^i_{x_j}(\tilde{x}) + \int_0^{x_n} \underbrace{F^{in}_{x_j}}_{\overset{(ii)}{=} F^{ij}_{x_n} + F^{jn}_{x_i}}(\tilde{x}, t)\, dt \\ =& \alpha^i_{x_j}(\tilde{x}) - \underbrace{\alpha^j_{x_i}(\tilde{x})}_{=0} + \int_0^{x_n} F^{ij}_{x_n}(\tilde{x}, t) + \underbrace{F^{jn}_{x_i}}_{0}(\tilde{x}, t) \\ =& F^{ij}(\tilde{x}, 0) + \int_0^{x_n} \frac{d}{dt}\left[F^{ij}(\tilde{x}, t)\right] dt \\ =& F^{ij}(x), \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu et termine la démonstration du théorème. □

10.2.2 Le problème de Dirichlet, cas où a est constant

Dans le cas où a est constante, l'idée est la suivante. Considérons un ensemble Ω ouvert borné et une direction $a \in \mathbb{R}^n$, non nulle. Pour $x \in \Omega$, on définit

$$\begin{aligned} \alpha_-(x) =& \inf\{t \leqslant 0 \ :\ x + sa \in \Omega \text{ pour tout } s \in]t, 0]\} \\ \alpha_+(x) =& \sup\{t \geqslant 0 \ :\ x + sa \in \Omega \text{ pour tout } s \in [0, t[\}. \end{aligned}$$

On a alors que les segments $[x + \alpha_-(x)\, a,\ x + \alpha_+(x)\, a]$ forment un "hachurage" de notre domaine. Or, quand on s'intéresse aux solutions de

$$\begin{cases} \nabla u - (\nabla u)^t = F & \text{dans } \Omega \\ \langle a, u \rangle = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

on aura besoin d'intégrer le long de ces lignes. En effet, notre solution u aura la forme

$$u^i(x) = \int_{\alpha_-(x)}^{0} \varphi^i(x+ta)\, dt,$$

où φ^i reste à définir et $x+ta$, avec $t \in [\alpha_-(x), 0]$ est une paramétrisation du segment qui joint x au point du bord $x + \alpha_-(x)\, a$ de façon parallèle à a. Or, pour que u soit régulière, on aura besoin que α_- le soit aussi.

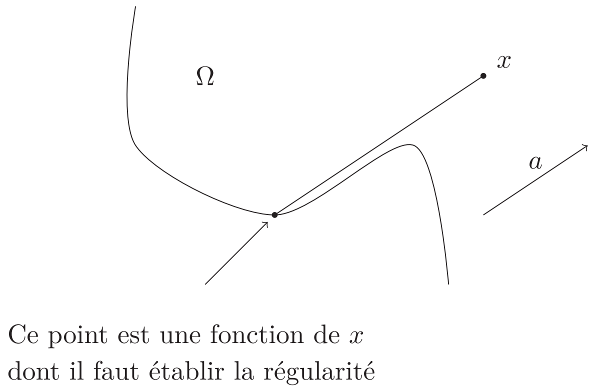

FIGURE 10.1 – Difficulté dans le problème du rotationnel sous contrainte avec une donnée de Dirichlet.

À cette fin, on introduit la définition suivante.

Définition 10.5 (C^r-a-simple)**.**
Soit $r \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe de bord Lipschitz. On dit que Ω est *C^r-a-simple* si il existe $\alpha_- : \overline{\Omega} \to]-\infty, 0]$ et $\alpha_+ : \overline{\Omega} \to [0, \infty[$ tels que

(*i*) $\alpha_-, \alpha_+ \in C^r(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$;

(*ii*)
$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega}]x + \alpha_-(x)\, a, x + \alpha_+(x)\, a[$$

(*iii*) pour tout $x \in \Omega$, $x + \alpha_-(x)\, a, x + \alpha_+(x)\, a \in \partial\Omega$

Si de plus $\alpha_-, \alpha_+ \in C^r\left(\overline{\Omega}\right)$, on dit que Ω est *C^r-a-simple jusqu'au bord.*

Exemple 10.6 (Boule)**.**
Soit $a = e^n = (0, ..., 0, 1)$ et $\Omega = B_1(0)$. Alors, Ω est C^∞-e^n-simple. En effet, si on écrit $x = (\hat{x}, x_n)$ avec $\hat{x} = (x_1, ..., x_{n-1})$, on a

$$\alpha_-(x) = -\sqrt{1 - |\hat{x}|^2} - x_n$$
$$\alpha_+(x) = \sqrt{1 - |\hat{x}|^2} - x_n,$$

qui sont C^∞ tant que $|\hat{x}| < 1$ et C^0 sur $\overline{B}_1(0)$. De plus, pour tout $t \in]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$,

$$|x + te^n|^2 = |(x_1, ..., x_{n-1}, x_n + t)|^2 = |\hat{x}|^2 + (x_n + t)^2 .$$

Or, remarquons que $-\sqrt{1 - |\hat{x}|^2} < x_n + t < \sqrt{1 - |\hat{x}|^2}$, ainsi,

$$|x + te^n|^2 < |\hat{x}|^2 + \left|1 - |\hat{x}|^2\right| = 1,$$

avec égalité si et seulement si $t = \alpha_-(x)$ ou $t = \alpha_+(x)$. Ainsi, on a bien montré que la boule est C^∞-e^n-simple.

Notons que la boule étant invariante sous rotation, elle est en fait C^∞-a-simple pour tout vecteur $a \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 10.7 (Domaine x_j-simple)**.**
Soit $1 \leqslant j \leqslant n$ et Ω un domaine x_j-simple, c'est-à-dire, il existe un domaine $O \subset \mathbb{R}^{n-1}$ régulier et $\beta_-, \beta_+ \in C^1\left(\overline{O}\right)$ tels que $\beta_- < \beta_+$ dans O et, si on écrit $\hat{x} = (x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, .., x_n)$

$$\Omega = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \hat{x} \in O \text{ et } \beta_-(\hat{x}) < x_j < \beta_+(\hat{x})\}.$$

Alors, Ω est C^1-e^j-simple jusqu'au bord, où e^j est le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En effet, on a alors

$$\begin{aligned}\alpha_-(x) =& \beta_-(\hat{x}) - x_j\\ \alpha_+(x) =& \beta_+(\hat{x}) - x_j,\end{aligned}$$

qui sont $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. On voit donc que la notion de C^r-a-simple généralise la notion de x_j-simple en précisant la régularité des fonctions et en admettant des vecteurs qui ne soient pas parallèles au vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 10.8 (Propriétés des fonctions α_- et α_+)**.**
Soit $r \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe et C^r-a-simple. Si α_-, α_+ sont les fonctions données par la définition de C^r-a-simple et si

$$\pi_-, \pi_+ \colon \Omega \to \partial\Omega$$

sont définies par $\pi_-(x) = x + \alpha_-(x)\, a$ et $\pi_+(x) = x + \alpha_+(x)\, a$, alors,

(i) pour tout $x \in \Omega$, $\alpha_-(x) < 0$ et $\alpha_+(x) > 0$;

(ii) pour tout $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\alpha_-(x) =& \min\{t \leqslant 0 \ : \ x + sa \in \Omega \text{ pour tout } s \in]t, 0]\}\\ \alpha_+(x) =& \max\{t \geqslant 0 \ : \ x + sa \in \Omega \text{ pour tout } s \in [0, t[\};\end{aligned}$$

(iii) si $r \geqslant 1$, pour tout $x \in \Omega$, $\langle a, \nabla\alpha_-(x)\rangle = -1$ et $\langle a, \nabla\alpha_+(x)\rangle = -1$;

(iv) si $r \geqslant 2$, $\alpha_- \in C^{r-1}(\Omega \cup \pi_-(\Omega))$ et $\alpha_+ \in C^{r-1}(\Omega \cup \pi_+(\Omega))$ et pour tout multi-indice k tel que $1 \leqslant |k| \leqslant r-1$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(\pi_-(x)) = \frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x),$$

et

$$\frac{\partial^{|k|}\alpha_+}{\partial x^k}(\pi_+(x)) = \frac{\partial^{|k|}\alpha_+}{\partial x^k}(x);$$

(v) si $r \geqslant 2$, pour tout $x \in \pi_-(\Omega)$,

$$\nu(x) = \frac{\nabla\alpha_-(x)}{|\nabla\alpha_-(x)|}$$

et pour tout $x \in \pi_+(\Omega)$,

$$\nu(x) = -\frac{\nabla\alpha_+(x)}{|\nabla\alpha_+(x)|},$$

où ν est la normale extérieure ;

(vi) Si $r \geqslant 2$, le bord de Ω se décompose en trois parties de la façon suivante

$$\partial\Omega = \overline{\pi_-(\Omega) \bigcup \pi_+(\Omega) \bigcup \Sigma_0},$$

où

$$\Sigma_0 = \{x \in \partial\Omega \ : \ \langle a, \nu(x)\rangle = 0\}.$$

De plus, l'union est disjointe.

(vii) Si $x \in \partial\Omega$ est tel que $\langle \nu(x), a\rangle = 0$, alors, pour tout $t \in]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$, $x + ta \in \partial\Omega$ et

$$\langle \nu(x+ta), a\rangle = 0;$$

Démonstration. On commence par la preuve de (i).

Si $\alpha_-(x) = 0$ ou $\alpha_+(x) = 0$, on a alors $x = x + \alpha_-(x)a$ ou $x = x + \alpha_+(x)a$ respectivement. Or, par hypothèse, $x + \alpha_-(x)a, x + \alpha_+(x)a \in \partial\Omega$. Ainsi, $x \in \Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$ vu que Ω est ouvert, ce qui est absurde.

Passons à la preuve de (ii).

Soit $x \in \Omega$ et $s \in]\alpha_-(x), 0] \subset]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$. Alors, par la définition de C^r-a-simple,

$$x + sa \in]x + \alpha_-(x)a, x + \alpha_+(x)a[\subset \Omega.$$

Ainsi,

$$\alpha_-(x) \in \{t \leqslant 0 \ : \ x + sa \in \Omega \text{ pour tout } s \in]t, 0]\}.$$

De plus, quelque soit $t_0 < \alpha_-(x)$, alors, $\alpha_-(x) \in]t_0, 0]$ et $x + \alpha_-(x)a \in \partial\Omega$. Vu que Ω est ouvert ceci implique que $x + \alpha_-(x)a \notin \Omega$. Ainsi

$$t_0 \notin \{t \leqslant 0 \ : \ x + sa \in \Omega \text{ pour tout } s \in]t, 0]\},$$

ce qui montre le résultat. Le résultat pour α_+ se montre de façon analogue.

Passons à la preuve de (iii).

À l'aide de (ii), on voit aisément que pour $x \in \Omega$ et h suffisamment petit, on a

$$\alpha_-(x + ha) = \alpha_-(x) - h.$$

Ainsi,

$$\frac{\alpha_-(x+ha) - \alpha_-(x)}{h} = -1.$$

Vu que α_- est au moins C^1, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha_-(x+ha) - \alpha_-(x)}{h} = \langle \nabla\alpha_-(x), a\rangle,$$

ce qui montre le résultat. Le résultat pour α_+ est analogue.

Passons à la preuve de (iv)

Soit k un multi-indice non nul tel que $|k| \leqslant r - 1$. Alors pour tout $x \in \Omega$ et t suffisamment petit,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x+ta)\right] = \left\langle \nabla\frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x+ta), a\right\rangle.$$

Vu que $\alpha_- \in C^r$, on déduit

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x+ta)\right] = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}\left[\langle \nabla\alpha_-(x+ta), a\rangle\right] \overset{(iii)}{=} 0.$$

Ainsi, pour tout t_1, t_2 tels que $x + t_i a \in \Omega$, on a

$$\frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x + t_1 a) = \frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x + t_2 a).$$

Par conséquent, pour $x \in \pi_-(\Omega)$, on définit

$$\frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x) = \frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x')$$

où $x' \in \Omega$ est tel que $\pi_-(x') = x$. Par le calcul ci-dessus, cette définition ne dépend pas du choix de x'. Il faut maintenant montrer que $\frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}$ est continue en $x \in \pi_-(\Omega)$. Soit donc $(x_n)_{n\geqslant 1} \subset \Omega$ une suite telle que $x_n \to x$. Soit $x' \in \Omega$ tel que $\pi_-(x') = x$ et $t = -a(x')$. Alors, $x_n + ta \to x'$. Ainsi, vu que Ω est ouvert, on peut supposer sans perte de généralité que $x_n + ta \in \Omega$. Alors, vu que $\alpha_- \in C^r(\Omega)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x_n + ta) = \frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x') = \frac{\partial^{|k|}\alpha_-}{\partial x^k}(x).$$

Ceci montre la continuité des dérivées de α_-. La continuité de α_- elle-même découle du fait que $\alpha_- \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ par hypothèse. Le résultat pour α_+ est en tout point similaire.

Pour la preuve de (v), il suffit de constater que localement, on peut étendre α_- et α_+ en dehors de $\overline{\Omega}$ par réfraction de telle sorte que le bord soit donné par $\alpha_-^{-1}(\{0\})$ et $\alpha_+^{-1}(\{0\})$. Le fait que par (iv) α_- et α_+ sont C^{r-1} dans ce voisinage, nous permet de conclure que la normale est définie par leurs gradients. Pour le signe, il suffit de constater que α_- croissant en direction du bord tandis que α_+ décroît.

Passons à la preuve de (vi). On va montrer que

$$\{x \in \partial\Omega \ : \ \text{la normale est bien définie en } x\} = \pi_-(\Omega) \bigcup \pi_+(\Omega) \bigcup \Sigma_0$$

et que les unions sont disjointes. Commençons par supposer que $x \in \partial\Omega$ est tel que la normale est bien définie en x. Si $\langle \nu(x), a\rangle = 0$, alors, $x \in \Sigma_0$. Supposons maintenant que $\langle \nu(x), a\rangle < 0$. Alors, vu que ν est la normale extérieure, ceci implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + ta \in \Omega$ pour tout $0 < t \leqslant \varepsilon$. Posons $x_0 = x + \varepsilon t$. Alors, $\alpha_-(x_0) = -\varepsilon$ et donc $x = \pi_-(x_0) \in \pi_-(\Omega)$. Pour finir, si $\langle \nu(x), a\rangle > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + ta \in \Omega$ pour tout $-\varepsilon \leqslant t < 0$. Posons $x_0 = x - \varepsilon a$. Alors, $\alpha_+(x_0) = \varepsilon$ et donc $x = \pi_+(x_0) \in \pi_+(\Omega)$. Ceci montre une des inclusions. Pour l'autre, il suffit de constater que par définition la normale est bien définie sur Σ_0 et qu'elle est bien définie sur $\pi_-(\Omega)$ et $\pi_+(\Omega)$ par (v). Pour montrer que l'union est disjointe on va montrer que pour tout $x \in \pi_-(\Omega)$, $\langle \nu(x), a\rangle < 0$ et que pour tout $x \in \pi_+(\Omega)$, $\langle \nu(x), a\rangle > 0$. En effet, si $x \in \pi_-(\Omega)$,

$$\langle \nu(x), a\rangle \overset{(v)}{=} \frac{1}{|\nabla\alpha_-(x)|}\langle \nabla\alpha_-(x), a\rangle \overset{(iii)}{=} \frac{-1}{|\nabla\alpha_-(x)|} < 0,$$

et si $x \in \pi_+(\Omega)$, on a

$$\langle \nu(x), a\rangle \overset{(v)}{=} \frac{-1}{|\nabla\alpha_+(x)|}\langle \nabla\alpha_+(x), a\rangle \overset{(iii)}{=} \frac{1}{|\nabla\alpha_+(x)|} > 0.$$

D'où, l'union est disjointe.

Passons à la preuve de (vii). Soit donc $x \in \partial\Omega$ tel que $\langle \nu(x), a\rangle = 0$. On commence par remarquer que $x \in \Sigma_0$ implique par (vi) que $x \notin \pi_-(\Omega) \cup \pi_+(\Omega)$. Donc, $\alpha_-(x) < 0 < \alpha_+(x)$. De plus, par continuité jusqu'au bord et par (ii), on a que pour tout $\alpha_-(x) < t < \alpha_+(x)$,

$$\alpha_-(x + ta) = \alpha_-(x) - t \text{ et } \alpha_+(x + ta) = \alpha_+(x) - t.$$

On montre maintenant dans un premier temps que pour tout $\alpha_-(x) < t < \alpha_+(x)$, $x + ta \in \partial\Omega$. Supposons donc par l'absurde qu'il existe $\alpha_-(x) < t < \alpha_+(x)$ tel que $x + ta \in \Omega$. Il est évident alors que $t \neq 0$ On distingue donc deux cas en fonction du signe de t. Si $t < 0$, alors, on pose $y = x + ta$. Et alors, on a $y - ta = y + |t|a = x \in \partial\Omega$. Par conséquent (ii) implique que $\alpha_+(y) \leqslant |t|$. Mais, on a aussi

$$\alpha_+(y) = \alpha_+(x + ta) = \alpha_+(x) - t = \underbrace{\alpha_+(x)}_{>0} + |t| > |t|,$$

et on obtient une contradiction. Si maintenant $t > 0$, alors, on pose $y = x + ta$, et alors, $y + ta = y - |t|a = x \in \partial\Omega$. Ainsi, par (ii), on a $|\alpha_-(y)| \leqslant t$. Mais, on a aussi

$$|\alpha_-(y)| = -\alpha_-(x + ta) = -\underbrace{\alpha_-(x)}_{<0} + t > t$$

et on obtient une contradiction. On a donc obtenu le résultat que pour tout $\alpha_-(x) < t < \alpha_+(x)$, $x + ta \in \partial\Omega$. Il nous faut maintenant montrer que $\langle \nu(x + ta), a\rangle = 0$. Or, remarquons que si on définit$\gamma\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ par $\gamma(s) = x + (t + s)a$, on a que $\gamma(s) \in \partial\Omega$ pour tout s. Ainsi, $\gamma'(0)$ est tangent à $\partial\Omega$ et donc orthogonal à $\nu(\gamma(0))$. Ceci est précisément le résultat vu que $\gamma(0) = a + tx$ et $\gamma'(0) = a$.

□

Exemple 10.9 (La régularité de $\alpha_\pm$ n'est pas liée à celle du bord de Ω)**.**
Considérons $a = (0, 1)$ et le domaine

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \ : \ -1 < x_1 < 1 \text{ et } (x_2 - 1)^3 < x_1 < (x_2 + 1)^3\right\}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_+(x_1, x_2) &= \sqrt[3]{x_1} - x_2 + 1 \\ \alpha_-(x_1, x_2) &= \sqrt[3]{x_1} - x_2 - 1. \end{aligned}$$

Dans un voisinage de $x_1 = 0$, on a que le bord de Ω est C^∞, vu qu'il est paramétrisé par $x_1 = (x_2 \pm 1)^3$, mais $\alpha_\pm$ n'y sont que continues. De plus, dans un voisinage de $x_1 = \pm 1$, le bord du domaine n'est que Lipschitz, mais $\alpha_\pm$ y sont C^∞. Il n'y a donc a priori aucun lien entre la régularité d'un domaine et la régularité de $\alpha_\pm$.

Théorème 10.10.
Soient $r \geqslant 3$, $a \in \mathbb{R}^n$, Ω un ouvert borné C^r-a-simple (avec α_- et α_+ les fonctions données par la définition) et $F = (F^{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n}\right)$.

Aspect nécessaire. *Si il existe $u \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ une solution de*

$$\begin{cases} \nabla u - (\nabla u)^t = F & \text{dans } \Omega \\ \langle a, u\rangle = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10.3}$$

alors,

(i) $F^t = -F$ dans Ω ;

(ii) $dF = 0$ dans Ω, c'est-à-dire, pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0$$

dans Ω ;

(iii) $\nu \wedge F = 0$, c'est-à-dire pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$

$$F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j + F^{jk}\nu^i = 0$$

sur $\pi_-(\Omega) \cup \pi_+(\Omega)$;

(iv) Pour tout $x \in \partial\Omega$ tel que $\langle \nu(x), a \rangle = 0$, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\sum_{j=1}^{n} F^{ij}(x) a^j = 0;$$

(v) pour tout $x \in \Omega$ et $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \sum_{j=1}^{n} F^{ij}(x + ta) a^j dt = 0.$$

Aspect suffisant. *Si les conditions (i) à (v) ci dessus sont vérifiées, alors il existe une unique solution $u \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ de (10.3).*

Aspect nécessaire et suffisant. *Si Ω est C^r-a-simple jusqu'au bord, c'est à dire, $\alpha_-, \alpha_+ \in C^r\left(\overline{\Omega}\right)$, alors, les conditions (i) à (v) sont vérifiées si et seulement si il existe une unique solution $u \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ de (10.3).*

Démonstration. ***Étape 1 :*** On montre l'aspect nécessaire.

La condition (i) est évidente. La preuve de (ii) est standard. Montrons donc (iii). On a, par la proposition 10.8 (iv) que $\pi_-(\Omega) \cup \pi_+(\Omega)$ est une partie du bord dont la régularité est C^{r-1} donc au moins C^2. Ainsi, par le théorème A.12, vu que $u = 0$ sur $\pi_-(\Omega)\, \pi_+(\Omega)$, on a pour tout $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$,

$$\left(u^i_{x_j} - u^j_{x_i}\right)\nu^k - \left(u^i_{x_k} - u^k_{x_i}\right)\nu^j + \left(u^j_{x_k} - u^k_{x_j}\right)\nu^i = 0.$$

Ainsi, vu que $\nabla u - (\nabla u)^t = F$, on a le résultat.

Montrons maintenant (iv). On a dans Ω,

$$\sum_{j=1}^{n} F^{ij} a^j = \sum_{j=1}^{n} \left(u^j_{x_i} - u^i_{x_j}\right) a^j = -\left\langle \nabla u^i, a \right\rangle.$$

Or, on a que $u^i = 0$ sur le bord de Ω. Ainsi, vu que u^i est C^2 jusqu'au bord, on a

$$\nabla u^i = \left\langle \nabla u^i, \nu \right\rangle \nu,$$

et donc, sur la partie du bord où $\langle \nu, a \rangle = 0$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} F^{ij} a^j = -\left\langle \nabla u^i, \nu \right\rangle \langle a, \nu \rangle = 0,$$

ce qui montre (iv). Passons à (v). On a pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \sum_{j=1}^{n} F^{ij}(x + ta) a^j dt &= \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \sum_{j=1}^{n} \left(u^j_{x_i}(x + ta) - u^i_{x_j}(x + ta)\right) a^j dt \\
&= \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle u, a \rangle](x + ta)\, dt \\
&\quad - \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \left\langle \nabla u^i(x + ta), a \right\rangle dt \\
&= -\int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \frac{d}{dt}\left[u^i(x + ta)\right] dt \\
&= -u^i(x + \alpha_+(x) a) + u^i(x + \alpha_-(x) a) = 0,
\end{aligned}$$

vu que $x + \alpha_-(x) a, x + \alpha_+(x) a \in \partial\Omega$. Ceci termine la démonstration de l'aspect nécessaire.

Étape 2 : On montre l'aspect suffisant.

On définit pour $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$u^i(x) = \int_{\alpha_-(x)}^0 \sum_{j=1}^n F^{ij}(x+ta)\, a^j\, dt.$$

Alors $u \in C^r(\Omega, \Lambda^1) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \Lambda^1\right)$ et pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned} u^i_{x_j} - u^j_{x_i} = & \sum_{k=1}^n a^k \left[(\alpha_-)_{x_i}(x)\, F^{jk}(x+\alpha_-(x)\, a) - (\alpha_-)_{x_j}(x)\, F^{ik}(x+\alpha_-(x)\, a)\right] \\ & - \sum_{k=1}^n a^k \int_{\alpha_-(x)}^0 \left(F^{jk}_{x_i} - F^{ik}_{x_j}\right)(x+ta)\, dt. \end{aligned}$$

Or, par la proposition 10.8, (iv) et (v), on a

$$\begin{aligned} & (\alpha_-)_{x_i}(x) F^{jk}(x+\alpha_-(x)\, a) - (\alpha_-)_{x_j}(x)\, F^{ik}(x+\alpha_-(x)\, a) \\ & \quad = |\nabla\alpha_-(\pi_-(x))| \left(\nu^i(\pi_-(x))\, F^{jk}(\pi_-(x)) - \nu^j(\pi_-(x))\, F^{ik}(\pi_-(x))\right), \end{aligned}$$

où $\pi_-(x) = x + \alpha_-(x)\, a$ et $\pi_+(x) = x + \alpha_+(x)\, a$. Par l'hypothèse (iii), on déduit donc que

$$\begin{aligned} & (\alpha_-)_{x_i}(x) F^{jk}(x+\alpha_-(x)\, a) - (\alpha_-)_{x_j}(x)\, F^{ik}(x+\alpha_-(x)\, a) \\ & \quad = - |\nabla\alpha_-(\pi_-(x))| \nu^k(\pi_-(x))\, F^{ij}(\pi_-(x)) \\ & \quad = - (\alpha_-)_{x_k}(x)\, F^{ij}(x+\alpha_-(x)\, a). \end{aligned}$$

De plus, par notre hypothèse (ii), on a

$$\int_{\alpha_-(x)}^0 \left(F^{jk}_{x_i} - F^{ik}_{x_j}\right)(x+ta)\, dt = - \int_{\alpha_-(x)}^0 F^{ij}_{x_k}(x+ta)\, dt.$$

Combinant nos deux calculs, on déduit

$$\begin{aligned} u^i_{x_j} - u^j_{x_i} &= \sum_{k=1}^n a^k \left[- (\alpha_-)_{x_k}(x)\, F^{ij}(x+\alpha_-(x)\, a) + \int_{\alpha_-(x)}^0 F^{ij}_{x_k}(x+ta)\right] \\ &= - \langle a, \nabla\alpha_-(x)\rangle\, F^{ij}(x+\alpha_-(x)\, a) + \int_{\alpha_-(x)}^0 \frac{d}{dt}\left[F^{ij}(x+ta)\right] dt \\ &= - \langle a, \nabla\alpha_-(x)\rangle\, F^{ij}(x+\alpha_-(x)\, a) + F^{ij}(x) - F^{ij}(x+\alpha_-(x)\, a). \end{aligned}$$

Or, par la proposition 10.8 (iii), on déduit que

$$u^i_{x_j} - u^j_{x_i} = F^{ij},$$

ce qui montre $\nabla u - (\nabla u)^t = F$. Montrons que $\langle a, u\rangle = 0$. Pour $x \in \Omega$, on a

$$\langle a, u\rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_{\alpha_-(x)}^0 F^{ij}(x+ta)\, a^i a^j\, dt = 0,$$

vu que $\left(F^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est antisymétrique.

Montrons pour finir que $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Vu que $u \in C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ la proposition 10.8 (vi) nous assure qu'il suffit de vérifier que $u = 0$ sur $\pi_-(\Omega) \cup \pi_+(\Omega) \cup \Sigma_0$, où

$$\Sigma_0 = \{x \in \partial\Omega \mid \langle \nu(x), a\rangle = 0\}.$$

Si $x \in \pi_-(\Omega)$, $\alpha_-(x) = 0$, et $u = 0$. Si $x \in \pi_+(\Omega)$, $u = 0$ par *(iv)*. Si $x \in \Sigma_0$, alors, par la proposition 10.8 (vii), $x + ta \in \Sigma_0$ pour tout $t \in]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$. Ainsi, par notre hypothèse (v), pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} F^{ij}(x + ta) a^j.$$

Par conséquent, $u(x) = 0$. Ceci montre que u est une solution du problème. Pour terminer l'aspect suffisant, il faut voir que les solutions sont uniques. Or, on a

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{j=1}^{n} F^{ij}(x+ta) a^j dt &= \int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{j=1}^{n} \left(u^j_{x_i}(x+ta) - u^i_{x_j}(x+ta)\right) a^j dt \\ &= \int_{\alpha_-(x)}^{0} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\langle a, u\rangle\right](x+ta)\, dt - \int_{\alpha_-(x)}^{0} \frac{d}{dt}\left[u^i(x+ta)\right] dt \\ &= u^i(x) - u^i(\pi_-(x)) = u^i(x).\end{aligned}$$

On donc que toute solution du problème est donnée par la formule ci-dessus, et ceci montre l'unicité.

Étape 3 : On montre le résultat du théorème sous l'hypothèse supplémentaire que Ω est C^r-a-simple jusqu'au bord.

L'aspect nécessaire découle de la première partie du théorème. Pour l'aspect suffisant, la construction est la même que ci-dessus. Néanmoins du fait que α_- et α_+ sont C^r jusqu'au bord, on déduit la même chose pour u. □

10.2.3 Le problème de Dirichlet, cas général

On s'intéresse maintenant au cas où a n'est pas constante. La question de résoudre le lemme de Poincaré sous une contrainte $\langle a, u\rangle$ dans le voisinage d'un point, ou sous des hypothèses plus strictes sur les données a déjà été étudié dans [7, §8.5].

Dans le cas où a n'est pas constante, on veut faire la même chose que lorsque a est constant mais en remplaçant les segments $x + ta$ par des lignes de flot de a. C'est à dire, à la place de $x + ta$, on considère $\gamma(x, t)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x,t) = a(\gamma(x,t)) \\ \gamma(x,0) = x. \end{cases}$$

Remarquons que si a est constant alors, $\gamma(x,t) = x + ta$. En plus du problème de régularité de α_- et α_+ qui apparaissant dans le cas où a est constant, le problème de leur existence apparaît dans ce cas. En effet, rien ne garantit *a priori* qu'une ligne du flot de a va atteindre le bord de notre domaine. On peut le garantir avec l'hypothèse supplémentaire que par exemple une des composantes de a ne s'annule jamais (voir lemme 10.12.) On adaptera néanmoins la notion de C^r-a-simple à aussi prendre en compte le problème d'existence, pour traiter le problème en général.

Proposition 10.11.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe de bord Lipschitz, $a \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel qu'une des composantes de a ne s'annule jamais sur $\overline{\Omega}$ et $F = \left(F^{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$. Alors, il existe au plus une solution $u \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ de

$$\begin{cases} \nabla u - (\nabla u)^t = F & \text{dans } \Omega \\ \langle a, u\rangle = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La preuve repose sur le lemme suivant.

Lemme 10.12 (Critère d'existence pour α_- et α_+).
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord Lipschitz, $a = (\hat{a}, 1) \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, avec $\hat{a} \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n-1}\right)$, telle que a ainsi que toutes ses dérivées d'ordre 2 ou moins sont bornées. Alors, il existe $\alpha_-, \alpha_+ \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ avec $\alpha_- < 0 < \alpha_+$ sur Ω et $\gamma \in C^2(E, \mathbb{R}^n)$ avec $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un ouvert contenant $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x \in \overline{\Omega},\ \alpha_-(x) \leqslant t \leqslant \alpha_+(x)\}$ tels que

(i) Pour tout $x \in \Omega$, $\gamma(x, \cdot)$ est une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x,t) = a(\gamma(x,t)) & \textit{pour tout } t \in]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[\\ \gamma(x,0) = x \end{cases};$$

(ii) Pour tout $x \in \Omega$, $\alpha_-(x) < t < \alpha_+(x)$, $\gamma(x,t) \in \Omega$ et $\gamma(x, \alpha_-(x)), \gamma(x, \alpha_+(x)) \in \partial\Omega$.

Démonstration. On commence par invoquer le théorème d'extension A.13 pour se ramener au cas où $\hat{a} \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-1})$. Soit alors $x \in \overline{\Omega}$. Par les résultats standards d'équations différentielles ordinaires (voir par exemple [5, Chapitre 1 §1, 2 & 4]), vu que a est C^1 il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x,t) = a(\gamma(x,t)) & \text{pour tout } t \in]T_-^x, T_+^x[\\ \gamma(x,0) = x. \end{cases}$$

Si $E = \{(x,t) \ : \ x \in \mathbb{R}^n, T_-^x < t < T_+^x\}$ alors E est ouvert, et vu que a est C^2, γ l'est aussi (voir [14, Chapitre 5 §2 & 3]). De plus, on a les deux possibilités suivantes pour $T_\pm$ qui est soit T_-^x, soit T_+^x,

(a) $|T_\pm| = +\infty$;

(b) existe $(t_k)_{k=1}^\infty \subset]T_-^x, T_+^x[$ tel que $t_k \to T_\pm$ et $|\gamma(x, t_k)| \to +\infty$.

On veut maintenant montrer que (b) est toujours vrai. Pour ceci, on suppose que (a) est vrai et on montre (b). Par unicité des solutions, on sait que si $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, on a $\gamma_n(x,t) = x_n + t$, vu que $a_n = 1$. Prenant donc $t_k = \pm k$, on a

$$|\gamma(x, t_k)| \geqslant |x_n + t_k| \geqslant k - |x_n| \to +\infty.$$

Ceci montre que (b) est toujours vérifié et en conjonction avec le fait que Ω est borné nous donne que pour tout $x \in \overline{\Omega}$, les ensembles

$$\{0 \leqslant t < T_+^x \ : \ \gamma(x,t) \notin \Omega\} \text{ et } \{T_-^x < t \leqslant 0 \ : \ \gamma(x,t) \notin \Omega\}$$

sont non vides. Ainsi, en définissant

$$\begin{aligned} \alpha_-(x) &= \sup\{T_-^x < t \leqslant 0 \ : \ \gamma(x,t) \notin \Omega\} \\ \alpha_+(x) &= \inf\{0 \leqslant t < T_+^x \ : \ \gamma(x,t) \notin \Omega\}, \end{aligned}$$

on a $T_- \leqslant \alpha_- \leqslant 0 \leqslant \alpha_+ \leqslant T_+$, $-\infty < \alpha_- < 0 < \alpha_+ < +\infty$ sur Ω, $\gamma(x,t) \in \Omega$ pour tout $t \in]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$ et $\gamma(x, \alpha_-(x)), \gamma(x, \alpha_+(x)) \in \partial\Omega$, ce qui est le résultat voulu. ☐

On peut maintenant passer à la preuve de la proposition 10.11.

Démonstration de la Proposition 10.11. On propose deux preuves du résultat. Une nous donne une formule pour la solution, l'autre ressemble plus à une démonstration usuelle d'unicité. Dans les deux cas, on doit commencer par appliquer le lemme 10.12. Supposons sans perte de généralité que a_n est la composante de a qui ne s'annule jamais. Alors, quitte à remplacer a par a/a_n, on peut supposer sans perte de généralité que $a_n = 1$. On peut donc écrire $a = (\hat{a}, 1)$ avec $\hat{a} \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n-1}\right)$ et considérer α_-, α_+ et γ comme dans le lemme 10.12.

Maintenant que γ est définit, passons à une première preuve du résultat. Soit u une solution C^1 du système. On calcule alors pour tout $x \in \Omega$ et $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\begin{aligned}
&-\int_{\alpha_-(x)}^0 \sum_{k,l=1}^n a_l(\gamma(x,t)) \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}(x,t) F^{lk}(\gamma(x,t))\,dt \\
&\quad = -\int_{\alpha_-(x)}^0 \sum_{k,l=1}^n a_l(\gamma(x,t)) \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}(x,t) \left(u^l_{x_k}(\gamma(x,t)) - u^k_{x_l}(\gamma(x,t))\right) dt \\
&\quad = \int_{\alpha_-(x)}^0 \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial \gamma_l}{\partial t}(x,t) \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\, u^k_{x_l}(\gamma(x,t))\,dt - \int_{\alpha_-(x)}^0 \sum_{l=1}^n a_l(\gamma(x,t)) \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u^l(\gamma(x,t))\right] dt \\
&\quad = \int_{\alpha_-(x)}^0 \sum_{k=1}^n \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}(x,t) \frac{\partial}{\partial t}\left[u^k(\gamma(x,t))\right] dt \\
&\qquad - \int_{\alpha_-(x)}^0 \frac{\partial}{\partial x_i}\langle a(\gamma(x,t)), u(\gamma(x,t))\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}[a(\gamma(x,t))], u(\gamma(x,t)) \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Intégrant par parties dans la première intégrale et utilisant le fait que $\langle a, u\rangle = 0$ dans la deuxième, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha_-(x)}^0 \sum_{k,l=1}^n a_l(\gamma(x,t)) \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}(x,t) F^{lk}(\gamma(x,t))\,dt \\
&\quad = \left[\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x,t), u(\gamma(x,t)) \right\rangle\right]_{t=\alpha_-(x)}^{t=0} - \int_{\alpha_-(x)}^0 \left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial x_i}(x,t), u(\gamma(x,t)) \right\rangle dt \\
&\qquad + \int_{\alpha_-(x)}^0 \left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial x_i}(x,t), u(\gamma(x,t)) \right\rangle dt \\
&\quad = \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x,0), u(\gamma(x,0)) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x)), u(\gamma(x,\alpha_-(x))) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Utilisant le fait que $\gamma(x,0) = x$ et $\gamma(x,\alpha_-(x)) \in \partial\Omega$, on déduit

$$\int_{\alpha_-(x)}^0 \sum_{k,l=1}^n a_l(\gamma(x,t)) \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}(x,t) F^{lk}(\gamma(x,t))\,dt = u^i(x).$$

On a ainsi trouvé une formule pour n'importe quelle solution qui ne dépend que des données, et donc, on obtient l'unicité.

On propose ici de donner une deuxième preuve de l'unicité qui suit la procédure standard pour montrer que les solutions d'un système linéaire sont uniques. Les arguments présentés sont en réalité les mêmes que ceux de la preuve ci-dessus. Soit donc u une solution du système

$$\begin{cases} \nabla u - (\nabla u)^t = 0 & \text{dans } \Omega \\ \langle a, u\rangle = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
u^i(x) &= \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x,0), u(\gamma(x,0)) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x)), u(\gamma(x,\alpha_-(x))) \right\rangle \\
&= \int_{\alpha_-(x)}^0 \frac{d}{dt}\left[\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x,t), u(\gamma(x,t)) \right\rangle\right] dt \\
&= \int_{\alpha_-(x)}^0 \left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial x_i}(x,t), u(\gamma(x,t)) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x,t), \frac{d}{dt}[u(\gamma(x,t))] \right\rangle dt \\
&= \int_{\alpha_-(x)}^0 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}[a(\gamma(x,t))], u(\gamma(x,t)) \right\rangle dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\sum_{k,l=1}^{n}\int_{\alpha_-(x)}^{0}\frac{\partial\gamma_l}{\partial x_i}(x,t)\frac{\partial\gamma_k}{\partial t}(x,t)\frac{\partial u_l}{\partial x_k}(\gamma(x,t))\,dt\\
=&-\int_{\alpha_-(x)}^{0}\left\langle a(\gamma(x,t)),\frac{\partial}{\partial x_i}[u(\gamma(x,t))]\right\rangle dt\\
&+\sum_{k,l=1}^{n}\int_{\alpha_-(x)}^{0}\frac{\partial\gamma_l}{\partial x_i}(x,t)\,a_k(\gamma(x,t))\frac{\partial u_l}{\partial x_k}(\gamma(x,t))\,dt\\
=&-\sum_{k,l=1}^{n}\int_{\alpha_-(x)}^{0}a_k(\gamma(x,t))\frac{\partial\gamma_l}{\partial x_i}(x,t)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\gamma(x,t))\,dt=0,
\end{aligned}$$

ce qui montre que 0 est l'unique solution du système ci-dessus.

□

Remarque 10.13.
Dans la preuve ci-dessus, on utilise une représentation de la solution à l'aide d'un flot de a, c'est à dire une solution du système

$$\begin{cases}\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t) &= a(\gamma(x,t))\\ \gamma(x,0) &= x.\end{cases}$$

Mais on peut changer a par une fonction qui ne s'annule nulle part sans changer le problème, mais ceci va changer le flot et donc a priori , ceci va changer la représentation de notre solution. Mais en réalité, on peut montrer que la représentation de la solution comme on le fait dans la première preuve ne dépend pas du choix de a. Plus précisément, si γ, α_-, α_+ vérifient la conclusion du lemme 10.12, que φ est une fonction scalaire qui ne s'annule jamais sur $\overline{\Omega}$, que ξ, β_-, β_+ vérifient les conclusions du lemme 10.12 mais pour $b=\varphi a$ à la place de a, alors,

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha_-(x)}^{0}\sum_{k,l=1}^{n}a_l(\gamma(x,t))\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\,F^{lk}(\gamma(x,t))\,dt\\
&\qquad=\int_{\beta_-(x)}^{0}\sum_{k,l=1}^{n}b_l(\xi(x,t))\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}(x,t)\,F^{lk}(\xi(x,t))\,dt.
\end{aligned}$$

En effet, si on considère θ tel que

$$\begin{cases}\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,t)= & \varphi(\gamma(x,\theta(x,t)))\\ \theta(x,0)= & 0\end{cases},$$

on a par unicité que $\xi(x,t)=\gamma(x,\theta(x,t))$ et $\theta(x,\beta_-(x))=\alpha_-(x)$. Ainsi le résultat découle d'un changement de variables et de l'utilisation du fait que

$$\sum_{k,l=1}^{n}a_l a_k F^{kl}=0,$$

par antisymétrie de F.

Définition 10.14 (C^r-a-simple, flot traversant de classe C^r)**.**
Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe de bord Lipschitz, $r\geqslant 0$, $s\geqslant 2$, $a\in C^s\left(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n\right)$. On dit que Ω est *C^r-a-simple* si il existe $\alpha_-\colon\Omega\to]-\infty,0]$, $\alpha_+\colon\Omega\to[0,\infty[$, $E\subset\mathbb{R}^{n+1}$ un ouvert contenant $\left\{(x,t)\ :\ x\in\overline{\Omega},\alpha_-(x)\leqslant t\leqslant\alpha_+(x)\right\}$ et tel que si $(x,t_0)\in E$, $\{t\ :\ (x,t)\in E\}$ est un intervalle et $\gamma\in C^s(E,\mathbb{R}^n)$ tels que

(*i*) $\alpha_-,\alpha_+\in C^r(\Omega)\cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$;

(*ii*) Pour tout $x\in\Omega$, $\gamma(x,\cdot)$ est l'unique solution de

$$\begin{cases}\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)=a(\gamma(x,t)) & \text{pour tout } t\in]\alpha_-(x),\alpha_+(x)[\\ \gamma(x,0)=x;\end{cases}$$

(*iii*) Pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $t \in]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$, $\gamma(x,t) \in \Omega$ et $\gamma(x, \alpha_-(x)), \gamma(x, \alpha_+(x)) \in \partial\Omega$.

De plus, on dit alors que $(\gamma, \alpha_-, \alpha_+)$ est un *flot traversant de classe C^r pour* Ω, et on note $\pi_-(x) = \gamma(x, \alpha_-(x))$ et $\pi_+(x) = \gamma(x, \alpha_+(x))$.

Si en plus des hypothèses ci-dessus, $\alpha_-, \alpha_+ \in C^r\left(\overline{\Omega}\right)$, on dit que Ω est *C^r-a- simple jusqu'au bord.*

Exemple 10.15 (Les fonctions α_- et α_+ n'existent pas, l'unicité n'est plus vérifiée)**.**
Soit $\Omega = B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$, un anneau centré en 0 et $a(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Il n'existe alors pas de flot traversant vu que les solutions de

$$\begin{cases} \frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t) = & a(\gamma(x,t)) \\ \gamma(x,0) = & x \end{cases}$$

sont données par

$$\gamma(x,t) = |x|(\cos(t + \arg(x)), \sin(t + \arg(x))),$$

qui n'atteint jamais le bord de Ω. Plus précisément, cet exemple est tel que l'hypothèse qu'une des composantes de a ne s'annule jamais n'est pas vérifiée. De plus, si $\psi \in C_c^1(1,4)$ est quelconque alors on vérifie que $u = \psi(|x|^2)\, x$ est une solution non nulle de

$$\begin{cases} \nabla u - (\nabla u)^t = 0 & \text{dans } \Omega \\ \langle a, u \rangle = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

d'où les solutions du système ne sont pas uniques.

Avant de passer aux propriétés du flot traversant, on rappelle qu'on note $\pi_-(x) = \gamma(x, \alpha_-(x))$ et $\pi_+(x) = \gamma(x, \alpha_+(x))$.

Proposition 10.16 (Propriétés du flot traversant)**.**
Soient $s \geqslant 2$, $s \geqslant r \geqslant 0$, des entiers, Ω un ouvert borné, connexe, de bord Lipschitz et $a \in C^s\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que Ω est C^r-a-simple. Soit $(\gamma, \alpha_-, \alpha_+)$ un flot traversant de classe C^r. Alors,

(i) pour tout $x \in \Omega$, $\alpha_-(x) < 0$ et $\alpha_+(x) > 0$;

(ii) pour tout $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \alpha_-(x) =& \min\{t \leqslant 0 \ : \ \gamma(x,\tau) \in \Omega \text{ pour tout } \tau \in]t, 0]\} \\ \alpha_+(x) =& \max\{t \geqslant 0 \ : \ \gamma(x,\tau) \in \Omega \text{ pour tout } \tau \in [0, t[\}\,; \end{aligned}$$

(iii) pour tous x, t_1, t_2 admissibles,

$$\gamma(\gamma(x, t_1), t_2) = \gamma(x, t_1 + t_2)\,;$$

(iv) pour tous $x \in \overline{\Omega}$ et $t \in]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$,

$$\begin{aligned} \alpha_-(\gamma(x,t)) =& \alpha_-(x) - t \\ \alpha_+(\gamma(x,t)) =& \alpha_+(x) - t \end{aligned}$$

(v) si $r \geqslant 1$, pour tout $x \in \Omega$,

$$\langle a(x), \nabla\alpha_-(x)\rangle = \langle a(x), \nabla\alpha_+(x)\rangle = -1;$$

(vi) pour tout $x \in \Omega$, $t \in]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$ et $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sum_{j=1}^{n} a^j(x) \frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}(x,t) = a^i(\gamma(x,t))\,;$$

(vii) *si* $r \geqslant 1$, *alors pour tout* $x \in \Omega$, $t \in [\alpha_-(x), \alpha_+(x)]$ *et* $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_-}{\partial x_j}(\gamma(x,t)) \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i}(x,t) = \frac{\partial \alpha_-}{\partial x_i}(x)\,;$$

(viii) *si* $r \geqslant 1$, *alors,* $\nabla \alpha_-$ *se prolonge de façon* C^{r-1} *à* $\pi_-(\Omega)$ *et* $\nabla \alpha_+$ *se prolonge de façon* C^{r-1} *à* $\pi_+(\Omega)$ *;*

(ix) *si* $r \geqslant 1$, *alors pour tout* $x \in \pi_-(\Omega)$,

$$\nu(x) = \frac{\nabla \alpha_-(x)}{|\nabla \alpha_-(x)|}$$

et pour tout $x \in \pi_+(\Omega)$,

$$\nu(x) = -\frac{\nabla \alpha_+(x)}{|\nabla \alpha_+(x)|};$$

(x) *si* $x \in \partial\Omega$ *est tel que* $\alpha_-(x) < 0 < \alpha_+(x)$, *alors pour tout* $t \in]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$, $\gamma(x,t) \in \partial\Omega$ *;*

(xi) *si* $x \in \partial\Omega$ *est tel que* $\alpha_-(x) < 0 < \alpha_+(x)$, *alors* $\langle \nu(x), a(x) \rangle = 0$.

Démonstration. La preuve de (i) est une conséquence directe de $\gamma(x,0) = x$ et la preuve de (ii) est une conséquence directe du fait que $\gamma(x,t) \in \Omega$ pour tout $t \in]\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$ et du fait que $\gamma(x, \alpha_-(x)) \in \partial\Omega$ et $\gamma(x, \alpha_+(x)) \in \partial\Omega$. La preuve de (iii) est une conséquence de l'unicité de la solution γ.

Passons à la preuve de (iv). On a

$$\gamma(\gamma(x,t), \alpha_-(x) - t) \overset{(iii)}{=} \gamma(x, \alpha_-(x)) \in \partial\Omega.$$

De plus, dès que $s > \alpha_-(x) - t$, on a $s + t > \alpha_-(x)$ et donc

$$\gamma(\gamma(x,t), s) \overset{(iii)}{=} \gamma(x, s+t) \in \Omega,$$

d'où

$$\alpha_-(x) - t = \min\{\tau \leqslant 0 \;:\; \gamma(\gamma(x,t), s) \in \Omega \text{ pour tout } s \in]\tau, 0]\} \overset{(ii)}{=} \alpha_-(\gamma(x,t)).$$

La preuve pour α_+ est en tout point similaire.

Passons à (v). On a

$$\begin{aligned} -1 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [\alpha_-(x) - t] \\ &\overset{(iv)}{=} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [\alpha_-(\gamma(x,t))] \\ &= \left[\left\langle \nabla \alpha_-(\gamma(x,t)), \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x,t) \right\rangle\right]_{t=0} \\ &= [\langle \nabla \alpha_-(\gamma(x,t)), a(\gamma(x,t)) \rangle]_{t=0} \\ &= \langle \nabla \alpha_-(x), a(x) \rangle. \end{aligned}$$

La preuve pour α_+ est en tout point similaire.

Passons à la preuve de (vi). On a

$$\begin{aligned} a^i(\gamma(x,t)) &= \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(x,t) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [\gamma_i(x, t+s)] \\ &\overset{(iii)}{=} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [\gamma_i(\gamma(x,s), t)] \end{aligned}$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} \left(\gamma \left(x, s \right), t \right) \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} \left(x, s \right) \right]_{s=0}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} \left(\gamma \left(x, 0 \right), t \right) a^j \left(\gamma \left(x, 0 \right) \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} \left(x, t \right) a^j \left(x \right),$$

qui est le résultat souhaité.

Passons à la preuve de (*vii*). Pour $x \in \Omega$ et $t \in]\alpha_- (x), \alpha_+ (x) [$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_-}{\partial x_j} \left(\gamma \left(x, t \right) \right) \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i} \left(x, t \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\alpha_- \left(\gamma \left(x, t \right) \right) \right] \overset{(iv)}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\alpha_- \left(x \right) - t \right] = \frac{\partial \alpha_-}{\partial x_i} \left(x \right),$$

qui est le résultat souhaité pour $t \in]\alpha_- (x), \alpha_+ (x) [$. Une fois qu'on aura montré (*viii*), un passage à la limite nous permet de déduire le même résultat pour $t = \alpha_- (x)$ ou $\alpha_+ (x)$.

Passons à la preuve de (*viii*).

Soit $x_0 \in \pi_- (\Omega)$. On commence par remarquer que par (*vii*), pour $\alpha_- (x_0) < t < 0$, l'expression

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_-}{\partial x_j} \left(\gamma \left(x_0, t \right) \right) \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i} \left(x_0, t \right) \tag{10.4}$$

est indépendante de t. Posons donc

$$\frac{\partial \alpha_-}{\partial x_i} \left(x_0 \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_-}{\partial x_j} \left(\gamma \left(x_0, t \right) \right) \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i} \left(x_0, t \right).$$

Remarquons que avec cette définition, on obtient quelque chose de $C^{r-1} \cap C^{s-1} = C^{r-1}$, et on a donc prolongé $\nabla \alpha_-$ comme souhaité. La preuve pour α_+ est en tout point similaire. Remarquons également que dans cette preuve, on utilise (*vii*) pour $\alpha_- (x_0) < t < 0$. Et donc le passage à la limite dans la preuve de (*vii*) est justifié.

Passons à la preuve de (*ix*).

Or, il suffit de constater que si on prolonge α_- par réfraction en dehors de $\overline{\Omega}$, on a que le bord de Ω est localement donné par $\alpha_-^{-1} (\{0\})$. D'où la normale est donnée par le gradient. Pour le signe, il suffit de constater que α_- croît en se rapprochant du bord tandis que α_+ décroît.

Passons à la preuve de (x).

Soit donc $x \in \partial \Omega$ tel que $\alpha_- (x) < 0 < \alpha_+ (x)$ et $t \in]\alpha_- (x), \alpha_+ (x) [$. Par continuité on a $\gamma (x, t) \in \overline{\Omega}$. Supposons donc par l'absurde que $\gamma (x, t) \in \Omega$. On distingue alors deux cas. Si $t > 0$, on pose $y = \gamma (x, t) \in \Omega$. Alors, par (*iv*), on a

$$\alpha_- (y) = \alpha_- (x) - t < -t.$$

De plus, par (*ii*), vu que $\gamma (y, -t) \in \partial \Omega$, on a

$$\alpha_- (y) \geqslant -t$$

ce qui est absurde et montre que $y = \gamma (x, t) \notin \Omega$, c'est-à-dire, $\gamma (x, t) \in \partial \Omega$. Dans le cas où $t < 0$, on fait la même chose, pour obtenir que si $y \in \Omega$ $-t < \alpha_+ (y) \leqslant -t$.

Passons à la preuve de (*xi*).

Or, par (x), on a que si $x \in \partial \Omega$ est tel que $\alpha_- (x) < 0 < \alpha_+ (x)$, la courbe $\gamma (x, t)$ est inclue dans le bord de Ω. Et donc, n'importe quel vecteur tangent à la courbe sera orthogonal à la normale. Or ceci est précisément ce qu'on veut montrer vu que le vecteur tangent de $\gamma (x, t)$ en $t = 0$ est $a (x)$.

Ceci termine la démonstration de la proposition.

□

Théorème 10.17.
Soient $r \geqslant 2$, Ω un ouvert borné de bord Lipschitz, $a \in C^{r+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ tel que Ω est C^r-a-simple, $(\gamma, \alpha_-, \alpha_+)$ un flot traversant de classe C^r et $F = (F^{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n}\right)$.

Aspect nécessaire. *Si il existe $u \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ une solution de*

$$\begin{cases} \nabla u - (\nabla u)^t = F & \text{dans } \Omega \\ \langle a, u \rangle = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10.5}$$

alors,

(i) $F^t = -F$ dans Ω ;

(ii) $dF = 0$ dans Ω, c'est-à-dire, pour tout $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$,

$$F^{ij}_{x_k} - F^{ik}_{x_j} + F^{jk}_{x_i} = 0$$

dans Ω ;

(iii) pour tout $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$

$$F^{ij}\nu^k - F^{ik}\nu^j + F^{jk}\nu^i = 0$$

sur $\pi_-(\Omega) \cup \pi_+(\Omega)$;

(iv) Pour tout $x \in \partial\Omega$ tel que $\alpha_-(x) < 0 < \alpha_+(x)$, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\sum_{j=1}^{n} F^{ij}(x)\, a^j(x) = 0;$$

(v) pour tout $x \in \Omega$ et $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \sum_{k,l=1}^{n} a_l(\gamma(x,t)) \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\, F^{kl}(\gamma(x,t))\, dt = 0.$$

Aspect suffisant. *Si les conditions (i) à (v) ci dessus sont vérifiées, alors il existe une unique solution $u \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ de (10.5).*

Aspect nécessaire et suffisant. *Si Ω est C^r-a-simple jusqu'au bord, c'est à dire, $\alpha_-, \alpha_+ \in C^r\left(\overline{\Omega}\right)$, alors, les conditions (i) à (v) sont vérifiées si et seulement si il existe une unique solution $u \in C^r\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ de (10.5).*

Démonstration. Commençons par l'aspect nécessaire. Soit donc $u \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ une solution de (10.5). La preuve que (i), (ii) et (iii) sont nécessaires est similaire à ce qu'on fait dans le preuve du théorème 10.10, mais en utilisant la proposition 10.16 ($viii$). Passons donc à la démonstration de (iv). Pour $x \in \Omega$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[u^i(\gamma(x,t))\right] &= \sum_{j=1}^{n} u^i_{x_j}(\gamma(x,t)) \frac{\partial \gamma_j}{\partial t}(x,t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} F^{ij}(\gamma(x,t))\, a^j(\gamma(x,t)) + \sum_{j=1}^{n} u^j_{x_i}(\gamma(x,t))\, a^j(\gamma(x,t)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} F^{ij}(\gamma(x,t))\, a^j(\gamma(x,t)) + \langle u_{x_i}, a \rangle (\gamma(x,t)). \end{aligned}$$

Or, vu que $\langle u, a \rangle = 0$, on a $\langle u_{x_i}, a \rangle = -\langle u, a_{x_i} \rangle$, et donc, on déduit

$$\frac{d}{dt}\left[u^i(\gamma(x,t))\right] = \sum_{j=1}^{n} F^{ij}(\gamma(x,t))\, a^j(\gamma(x,t)) - \langle u, a_{x_i} \rangle (\gamma(x,t)).$$

De plus, vu que u, γ sont C^1 sur $\overline{\Omega}$, on a que l'égalité est aussi vraie si $x \in \partial\Omega$. Si maintenant $x \in \partial\Omega$ est tel que $\alpha_-(x) < 0 < \alpha_+(x)$, on a par la proposition 10.16 (x) que $\gamma(x,t) \in \partial\Omega$ pour tout t. Ainsi vu que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on déduit

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left[u^i(\gamma(x,t))\right] = \sum_{j=1}^{n} F^{ij}(x)\, a^j(x) - \langle u, a_{x_i}\rangle(x) = \sum_{j=1}^{n} F^{ij}(x)\, a^j(x),$$

qui établit (iv).

Passons à la preuve de (v). Pour tout $x \in \Omega$, rappelons que $\gamma(x, \alpha_-(x)), \gamma(x, \alpha_+(x)) \in \partial\Omega$. Ainsi, $u(\gamma(x, \alpha_-(x))) = u(\gamma(x, \alpha_+(x))) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \Omega$ et $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x, \alpha_+(x)), u(\gamma(x, \alpha_+(x)))\right\rangle - \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x, \alpha_-(x)), u(\gamma(x, \alpha_-(x)))\right\rangle \\
&= \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \frac{d}{dt}\left[\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x,t), u(\gamma(x,t))\right\rangle\right] dt \\
&= \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \left\langle \frac{\partial^2\gamma}{\partial t\partial x_i}(x,t), u(\gamma(x,t))\right\rangle + \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x,t), \frac{d}{dt}[u(\gamma(x,t))]\right\rangle dt \\
&= \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}[a(\gamma(x,t))], u(\gamma(x,t))\right\rangle dt + \sum_{k,l=1}^{n} \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\, \frac{\partial\gamma_l}{\partial t}(x,t)\, u^k_{x_l}(\gamma(x,t))\, dt
\end{aligned}$$

De plus, vu que $\langle a, u\rangle = 0$ dans Ω, on a que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}[a(\gamma(x,t))], u(\gamma(x,t))\right\rangle = -\left\langle a(\gamma(x,t)), \frac{\partial}{\partial x_i}[u(\gamma(x,t))]\right\rangle.$$

Ainsi, reprenant le calcul, on a

$$\begin{aligned}
0 &= -\int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \left\langle a(\gamma(x,t)), \frac{\partial}{\partial x_i}[u(\gamma(x,t))]\right\rangle dt \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^{n} \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\, a_l(\gamma(x,t))\, u^k_{x_l}(\gamma(x,t))\, dt \\
&= -\sum_{k,l=1}^{n} \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} a_l(\gamma(x,t))\, \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\, u^l_{x_k}(\gamma(x,t))\, dt \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^{n} \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\, a_l(\gamma(x,t))\, u^k_{x_l}(\gamma(x,t))\, dt \\
&= \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \sum_{k,l=1}^{n} a_l(\gamma(x,t))\, \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\, F^{kl}(\gamma(x,t))\, dt,
\end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité et termine la preuve de l'aspect nécessaire.

Passons à l'aspect suffisant. Soit

$$u^i(x) = \int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{k,l=1}^{n} a_l(\gamma(x,t))\, \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\, F^{kl}(\gamma(x,t))\, dt.$$

On a alors $u \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$; montrons que u est une solution de (10.5).

Étape 1 : $\langle a, u\rangle = 0$.

Par la proposition 10.16 (vi), on a

$$\langle a, u\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\, a_l(\gamma(x,t))\, F^{kl}(\gamma(x,t))\, dt$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \int_{\alpha_-(x)}^{0} a_k\left(\gamma\left(x,t\right)\right) a_l\left(\gamma\left(x,t\right)\right) F^{kl}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) dt.$$

De plus, vu que F est antisymétrique, on a $\sum_{k,l=1}^{n} a_k a_l F^{kl} = 0$. Par conséquent, on déduit

$$\langle a, u\rangle = 0,$$

ce qui finit cette étape.

Étape 2 : $\nabla u - (\nabla u)^t = F$.

Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$\begin{aligned} u^i_{x_j} =& \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}\left(x,t\right) a_l\left(\gamma\left(x,t\right)\right) F^{kl}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) dt\right] \\ =& \underbrace{-\frac{\partial \alpha_-}{\partial x_j}\left(x\right) \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}\left(x,\alpha_-\left(x\right)\right) a_l\left(\gamma\left(x,\alpha_-\left(x\right)\right)\right) F^{kl}\left(\gamma\left(x,\alpha_-\left(x\right)\right)\right)}_{:=B_{ij}} \\ &+ \underbrace{\int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \gamma_k}{\partial x_j \partial x_i}\left(x,t\right) a_l\left(\gamma\left(x,t\right)\right) F^{kl}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) dt}_{:=I^1_{ij}} \\ &+ \underbrace{\int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{k,l,m=1}^{n} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}\left(x,t\right) \frac{\partial a_l}{\partial x_m}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) \frac{\partial \gamma_m}{\partial x_j}\left(x,t\right) F^{kl}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) dt}_{:=I^2_{ij}} \\ &+ \underbrace{\int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{k,l,m=1}^{n} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}\left(x,t\right) a_l\left(\gamma\left(x,t\right)\right) \frac{\partial F^{kl}}{\partial x_m}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) \frac{\partial \gamma_m}{\partial x_j}\left(x,t\right) dt}_{:=I^3_{ij}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u^i_{x_j} - u^j_{x_i} = B_{ij} - B_{ji} + I^1_{ij} - I^1_{ji} + I^2_{ij} - I^2_{ji} + I^3_{ij} - I^3_{ji}.$$

Remarquons que I^1_{ij} est symétrique en i, j et donc $I^1_{ij} - I^1_{ji} = 0$. Calculons

$$\begin{aligned} I^3_{ij} - I^3_{ji} =& \int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{k,l,m=1}^{n} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}\left(x,t\right) a_l\left(\gamma\left(x,t\right)\right) \frac{\partial F^{kl}}{\partial x_m}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) \frac{\partial \gamma_m}{\partial x_j}\left(x,t\right) dt \\ &- \int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{k,l,m=1}^{n} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_j}\left(x,t\right) a_l\left(\gamma\left(x,t\right)\right) \frac{\partial F^{kl}}{\partial x_m}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) \frac{\partial \gamma_m}{\partial x_i}\left(x,t\right) dt \\ =& \int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{k,lm=1}^{n} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}\left(x,t\right) \frac{\partial \gamma_m}{\partial x_j}\left(x,t\right) a_l\left(\gamma\left(x,t\right)\right) \\ &\cdot \underbrace{\left[\frac{\partial F^{kl}}{\partial x_m}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) - \frac{\partial F^{ml}}{\partial x_k}\left(\gamma\left(x,t\right)\right)\right]}_{\overset{(ii)}{=} \frac{\partial F^{km}}{\partial x_l}(\gamma(x,t))} dt \end{aligned}$$

$$=\int_{\alpha_-(x)}^{0}\sum_{k,l,m=1}^{n}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,t)\,\frac{\partial\gamma_l}{\partial t}(x,t)\,\frac{\partial F^{km}}{\partial x_l}(\gamma(x,t))\,dt$$

$$=\int_{\alpha_-(x)}^{0}\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,t)\,\frac{\partial}{\partial t}\left[F^{km}(\gamma(x,t))\right]dt.$$

Intégrant par parties, on obtient,

$$\begin{aligned}I_{ij}^3-I_{ji}^3=&\left[\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,t)\,F^{km}(\gamma(x,t))\right]_{t=\alpha_-(x)}^{t=0}\\&-\int_{\alpha_-(x)}^{0}\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,t)\right]F^{km}(\gamma(x,t))\,dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&F^{ij}(x)-\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\,F^{km}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\\&-\int_{\alpha_-(x)}^{0}\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial^2\gamma_k}{\partial t\partial x_i}(x,t)\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,t)\,F^{km}(\gamma(x,t))\,dt\\&-\int_{\alpha_-(x)}^{0}\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\,\frac{\partial^2\gamma_m}{\partial t\partial x_j}(x,t)\,F^{km}(\gamma(x,t))\,dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&F^{ij}(x)-\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\,F^{km}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\\&-\int_{\alpha_-(x)}^{0}\sum_{k,l,m=1}^{n}\frac{\partial a_k}{\partial x_l}(\gamma(x,t))\,\frac{\partial\gamma_l}{\partial x_i}(x,t)\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,t)\,F^{km}(\gamma(x,t))\,dt\\&-\int_{\alpha_-(x)}^{0}\sum_{k,l,m=1}^{n}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\,\frac{\partial a_m}{\partial x_l}(\gamma(x,t))\,\frac{\partial\gamma_l}{\partial x_j}(x,t)\,F^{km}(\gamma(x,t))\,dt\end{aligned}$$

En changeant les indices de sommation dans les deux derniers termes et en utilisant l'antisymétrie de F, on trouve

$$\begin{aligned}I_{ij}^3-I_{ji}^3=&F^{ij}(x)-\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\,F^{km}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\\&+\int_{\alpha_-(x)}^{0}\sum_{k,l,m=1}^{n}\frac{\partial a_l}{\partial x_m}(\gamma(x,t))\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_i}(x,t)\,\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}(x,t)\,F^{kl}(\gamma(x,t))\,dt\\&-\int_{\alpha_-(x)}^{0}\sum_{k,l,m=1}^{n}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,t)\,\frac{\partial a_l}{\partial x_m}(\gamma(x,t))\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,t)\,F^{kl}(\gamma(x,t))\,dt\end{aligned}$$

$$=F^{ij}(x)-\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\,F^{km}(\gamma(x,\alpha_-(x)))+I_{ji}^2-I_{ij}^2.$$

On a donc établit que

$$u_{x_j}^i-u_{x_i}^j=F^{ij}(x)-\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\,\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\,F^{mk}(\gamma(x,\alpha_-(x)))+B_{ij}-B_{ji}.$$

Or, utilisant la proposition 10.16 (*vii*), on a

$$\begin{aligned}B_{ij}-B_{ji}=&-\frac{\partial\alpha_-}{\partial x_j}(x)\sum_{k,l=1}^n\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\,a_l(\gamma(x,\alpha_-(x)))\,F^{kl}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\\&+\frac{\partial\alpha_-}{\partial x_i}(x)\sum_{k,l=1}^n\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\,a_l(\gamma(x,\alpha_-(x)))\,F^{kl}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&-\sum_{m=1}^n\frac{\partial\alpha_-}{\partial x_m}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\\&\quad\cdot\sum_{k,l=1}^n\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\,a_l(\gamma(x,\alpha_-(x)))\,F^{kl}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\\&+\sum_{m=1}^n\frac{\partial\alpha_-}{\partial x_m}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\\&\quad\cdot\sum_{k,l=1}^n\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\,a_l(\gamma(x,\alpha_-(x)))\,F^{kl}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&-\sum_{k,l,m=1}^n\frac{\partial\alpha_-}{\partial x_m}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\\&\quad\cdot a_l(\gamma(x,\alpha_-(x)))\,F^{kl}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\\&+\sum_{k,l,m=1}^n\frac{\partial\alpha_-}{\partial x_k}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\\&\quad\cdot a_l(\gamma(x,\alpha_-(x)))\,F^{ml}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&-\sum_{k,l,m=1}^n\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\,a_l(\gamma(x,\alpha_-(x)))\\&\quad\cdot\left(\frac{\partial\alpha_-}{\partial x_m}F^{kl}-\frac{\partial\alpha_-}{\partial x_k}F^{ml}\right)(\gamma(x,\alpha_-(x)))\end{aligned}$$

utilisant la proposition 10.16 (*ix*), on obtient

$$\begin{aligned}B_{ij}-B_{ji}=-\left|\nabla\alpha_-(\gamma(x,\alpha_-(x)))\right|&\sum_{k,l,m=1}^n\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\\&\cdot a_l(\gamma(x,\alpha_-(x)))\left(\nu^mF^{kl}-\nu^kF^{ml}\right)(\gamma(x,\alpha_-(x))).\end{aligned}$$

Par (*iii*) on déduit que

$$\nu^mF^{kl}-\nu^kF^{ml}=\nu^lF^{km}.$$

Reprenant le calcul, on obtient

$$\begin{aligned}B_{ij}-B_{ji}=&-\sum_{k,l,m=1}^n\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}(x,\alpha_-(x))\frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}(x,\alpha_-(x))\,a_l(\gamma(x,\alpha_-(x)))\\&\quad\cdot\frac{\partial\alpha_-}{\partial x_l}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\,F^{mk}(\gamma(x,\alpha_-(x)))\end{aligned}$$

$$= -\left\langle \nabla\alpha_-, a\right\rangle \left(\gamma\left(x, \alpha_-\left(x\right)\right)\right) \sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}\left(x, \alpha_-\left(x\right)\right) \frac{\partial\gamma_m}{\partial x_j}\left(x, \alpha_-\left(x\right)\right) \cdot F^{mk}\left(\gamma\left(x, \alpha_-\left(x\right)\right)\right)$$

Utilisant la proposition 10.16 (v), on déduit

$$B_{ij} - B_{ji} = \sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}\left(x, \alpha_-\left(x\right)\right) \frac{\partial\gamma_m}{\partial x_i}\left(x, \alpha_-\left(x\right)\right) F^{mk}\left(\gamma\left(x, \alpha_-\left(x\right)\right)\right).$$

D'où on conclut finalement

$$u^i_{x_j} - u^j_{x_i} = F^{ij}.$$

Étape 3 : $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Soit $x \in \partial\Omega$. On distingue trois cas. Si $\alpha_-\left(x\right) = 0$, alors, $u\left(x\right) = 0$. Si $\alpha_+\left(x\right) = 0$, alors, on a

$$u^i\left(x\right) = \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} \sum_{k,l=1}^{n} a_l\left(\gamma\left(x,t\right)\right) \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}\left(x,t\right) F^{lk}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) dt \overset{(v)}{=} 0.$$

Si $\alpha_-\left(x\right) < 0 < \alpha_+\left(x\right)$, pour tout $t \in \left]\alpha_-\left(x\right), \alpha_+\left(x\right)\right[$, $\gamma\left(x,t\right) \in \Omega$ et $\alpha_-\left(\gamma\left(x,t\right)\right) < 0 < \alpha_+\left(\gamma\left(x,t\right)\right)$, d'où, par (iv), on a pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\sum_{l=1}^{n} F^{lk}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) a^l\left(\gamma\left(x,t\right)\right) = 0$$

et donc,

$$u^i\left(x\right) = \int_{\alpha_-(x)}^{0} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_i}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) \sum_{l=1}^{n} F^{lk}\left(\gamma\left(x,t\right)\right) a^l\left(\gamma\left(x,t\right)\right) dt = 0,$$

ce qui termine l'étape 3 et montre que u est une solution du problème.

Pour finir, si on suppose que Ω est C^r-a-simple jusqu'au bord, l'aspect nécessaire découle de la première partie du théorème, et l'aspect suffisant est la même construction que ci dessus, mais la meilleure régularité de α_- et α_+ est transmise à u.

$\square$

Annexes

Annexe A

Analyse et géométrie différentielle

A.1 Notions de base

On utilise les notations ainsi que la nomenclature standards pour noter les différents éléments de l'analyse avec les formes différentielles. La plupart de ces définitions se retrouvent dans [7], par exemple.

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note Λ^k, l'espace des k formes extérieures et

$$f = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} f^{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{ik},$$

pour f une k forme. De façon condensée, on écrira aussi

$$f = \sum_{I \in \mathcal{I}_k} f^I dx^I,$$

où $\mathcal{I}_k$ dénote l'ensemble des multi-indices ordonnés de longueur k.

Pour un sous-ensemble $I \subset \{1, \ldots, n\}$ on écrit aussi $dx^I = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, où $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ et $i_1 < \ldots < i_k$. Par exemple $dx^{\{2,1\}} = dx^1 \wedge dx^2$.

On note $f \wedge g$ pour le produit extérieur entre deux formes, $f \lrcorner g$ pour le produit intérieur et $*$ pour l'opérateur de Hodge. C'est-à-dire, pour $f \in \Lambda^k$, $*f$ est l'unique élément de Λ^{n-k} tel que pour tout $g \in \Lambda^k$,

$$(*f) \wedge g = \langle f, g \rangle \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on dénote de façon standard $C^r\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ pour l'espace des k formes différentielles r fois continûment dérivable sur Ω, et $C^r\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$ pour l'espace des k formes différentielles dont toutes les composantes ainsi que leurs dérivées d'ordre r ou moins se prolongent continûment jusqu'au bord de Ω. De façon similaire, on définit $W^{r,p}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$, les formes différentielles dont les composantes sont dans l'espace de Sobolev $W^{r,p}$.

Définition A.1 (dérivée extérieure d, dérivée intérieure δ)**.**
Pour $f \in C^1\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ ou $f \in W^{1,p}\left(\Omega, \Lambda^k\right)$, on définit la dérivée extérieure de f par

$$df = \sum_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^I}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I$$

et la dérivée intérieure de f

$$\delta f = (-1)^{n(k-1)} * (d(*f)) = \sum_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^I}{\partial x_i} dx^i \lrcorner dx^I.$$

Définition A.2 (Rappel)**.**
Pour $U, V \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts, $\varphi = (\varphi^1, ..., \varphi^n) \in \mathrm{Diff}^{r+1}(U, V)$ un difféomorphisme et

$$f = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} f^{i_1 ... i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \in C^r\left(V, \Lambda^k\right)$$

une k forme, on définit le *rappel de f par φ* (parfois aussi appelé *pullback*) noté $\varphi^*(f) \in C^r\left(U, \Lambda^k\right)$ par

$$\varphi^*(f) = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} f^{i_1 ... i_k} d\varphi^{i_1} \wedge ... \wedge d\varphi^{i_k}.$$

Définition A.3 (formes harmoniques, $\mathcal{H}_N$, $\mathcal{H}_T$)**.**
Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, on définit les espaces de formes harmonique

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_T\left(\Omega, \Lambda^k\right) &= \left\{\chi \in W^{1,2}\left(\Omega, \Lambda^k\right) \;:\; d\chi = 0, \delta\chi = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \nu \wedge \chi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ \mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^k\right) &= \left\{\chi \in W^{1,2}\left(\Omega, \Lambda^k\right) \;:\; d\chi = 0, \delta\chi = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \nu \lrcorner \chi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.\end{aligned}$$

En identifiant les 1 formes à des champs vectoriels, on notera également

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_T\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right) &= \left\{\chi \in W^{1,2}\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right) \;:\; \operatorname{rot}\chi = 0, \operatorname{div}\chi = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \nu \wedge \chi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ \mathcal{H}_N\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right) &= \left\{\chi \in W^{1,2}\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right) \;:\; \operatorname{rot}\chi = 0, \operatorname{div}\chi = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \langle \nu, \chi \rangle = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.\end{aligned}$$

La proposition ci-dessous regroupe les propriétés des formes harmoniques qu'on utilisera ici (voir [7, Theorem 6.3, Theorem 6.5, Remark 6.6].)

Proposition A.4 (propriété des formes harmoniques)**.**
Soit Ω un ouvert borné de bord C^∞ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors,

(i) $\mathcal{H}_T\left(\Omega, \Lambda^k\right) \cup \mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^k\right) \subset C^\infty\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$ *;*

(ii) si Ω est contractile, $\mathcal{H}_T\left(\Omega, \Lambda^k\right) = \mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^k\right) = \{0\}$ *;*

(iii) si Ω est simplement connexe, $\mathcal{H}_T\left(\Omega, \Lambda^1\right) = \mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^1\right) = \{0\}$ *;*

(iv) si $n = 2$, $\mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^2\right) = \{0\}$ *et* $\mathcal{H}_T\left(\Omega, \Lambda^2\right) = \{C dx^1 \wedge dx^2 \;:\; C \in \mathbb{R}\}$.

La proposition ci-dessous regroupe les propriétés des produits extérieurs et intérieurs ainsi que du rappel qu'on utilise.

Proposition A.5. *(i) pour $v, w \in \Lambda^1$ et $\phi \in \Lambda^k$, on a*

$$\langle v, w \rangle \phi = w \lrcorner (v \wedge \phi) + v \wedge (w \lrcorner \phi);$$

(ii) pour $\varphi \in C^1(U, V)$, $\psi \in C^1(W, U)$, $f, g \in C^0\left(V, \Lambda^k\right)$ et $h \in C^0\left(V, \Lambda^l\right)$,

$$\begin{aligned}\varphi^*(f + g) &= \varphi^*(f) + \varphi^*(g) \\ \varphi^*(f \wedge h) &= \varphi^*(f) \wedge \varphi^*(h) \\ (\varphi \circ \psi)^*(f) &= \psi^*(\varphi^*(f)).\end{aligned}$$

Si de plus, $f \in C^1$ et $\varphi \in C^2$, alors,

$$\varphi^*(df) = d\varphi^*(f).$$

Définition A.6 (rang d'une 2 forme, rang$[\alpha]$)**.**
Pour α une 2-forme, on peut définir une matrice antisymétrique $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ par

$$\overline{\alpha}_{ij} = \begin{cases} -\alpha^{ij} & \text{si } i < j \\ \alpha^{ji} & \text{si } i > j \end{cases}$$

Le *rang* de α noté rang$[\alpha]$ est alors le rang de la matrice $\overline{\alpha}$ qui est un nombre pair entre 0 et n.

Pour une définition plus générale du rang, on réfère à [7, Definition 2.28]

Définition A.7 (Régularité des domaines).
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert $0 \leqslant r \leqslant \infty$ et $0 \leqslant h \leqslant 1$. On dit que le bord de Ω est $C^{r,h}$ si pour tout $x \in \partial\Omega$ il existe un voisinage U et une fonction $\varphi \in C^{r,h}(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que, à une rotation près,

$$U \cap \Omega = U \cap \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \ : y_n > \varphi(y')\}.$$

Si le bord de Ω est de classe $C^{0,1}$, on dit que le bord est *Lipschitz.*

A.2 Résultats classiques

Théorème A.8 (Théorème de Darboux pour les deux formes fermées).
Soit $r \geqslant 1$, $2 \leqslant 2m \leqslant n$ des entiers, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage de x_0 et $\alpha \in C^r(\Omega, \Lambda^2)$ tel que $d\alpha = 0$ sur Ω et $\operatorname{rang}[\alpha] = 2m$ sur Ω.

Alors, il existe U un voisinage de x_0 et $\varphi \in \operatorname{Diff}^r(U, \varphi(U))$ tel que $\varphi(x_0) = x_0$ et

$$\varphi^*(\alpha) = \omega_m = \sum_{i=1}^{m} dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}$$

sur U.

Cette version du théorème de Darboux est tirée de [8, Théorème 6]. Une version du même théorème pour les espaces de Hölder est également disponible dans [7].

Les deux résultats suivants sont deux versions du lemme de Poincaré avec régularité optimale. Il s'agit des théorèmes 8.3 respectivement 8.16 dans [7].

Théorème A.9 (Lemme de Poincaré).
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord C^∞, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ des entiers, $0 < h < 1$ et $f \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^{k+1}\right)$. Alors, il existe $w \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$ tel que

$$dw = f$$

dans Ω si et seulement si

(i) $df = 0$ dans Ω ;

(ii) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_N\left(\Omega, \Lambda^{k+1}\right)$, $\int_\Omega \langle f, \chi \rangle = 0$.

De plus, dans le cas où $k = 0$, le résultat reste vrai sous les hypothèses $r \geqslant 0$, $0 \leqslant h \leqslant 1$.

Théorème A.10 (Lemme de Poincaré, problème de Dirichlet).
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord C^∞, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ des entiers, $0 < h < 1$, $f \in C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^{k+1}\right)$ et $w_0 \in C^{r+1,h}\left(\partial\Omega, \Lambda^k\right)$. Alors, il existe $w \in C^{r+1,h}\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$ tel que

$$\begin{cases} dw = f & \text{dans } \Omega \\ w = w_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

si et seulement si

(i) $df = 0$ dans Ω ;

(ii) $\nu \wedge f = \nu \wedge dw_0$ sur $\partial\Omega$;

(iii) pour tout $\chi \in \mathcal{H}_T\left(\Omega, \Lambda^{k+1}\right)$, $\int_\Omega \langle f, \chi \rangle = \int_{\partial\Omega} \langle \nu \wedge w_0, \chi \rangle$.

De plus, dans le cas où $k = 0$, le résultat reste vrai sous les hypothèses $r \geqslant 0$, $0 \leqslant h \leqslant 1$.

On donne maintenant une version du lemme de Poincaré qui donne des solutions explicites. L'énoncé vient de [9].

Théorème A.11 (Solution explicite au lemme de Poincaré dans un domaine étoilé)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert étoilé par rapport à* $x_0 \in \Omega$, $r \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ *et* $f \in C^r\left(\Omega, \Lambda^{k+1}\right)$*. Soit* $w\colon \Omega \to \Lambda^k$ *définie par*

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_0^1 (x - x_0) \lrcorner f(x_0 + t(x - x_0)) t^k dt \\ &= \sum_{I \in \mathcal{I}_k} \left\{ \int_0^1 \left[(x - x_0) \lrcorner f(x_0 + t(x - x_0))\right]^I dt \right\} dx^I. \end{aligned}$$

Alors, $w \in C^r\left(\Omega, \Lambda^k\right)$ *est une solution de* $dw = f$*.*

Démonstration. La régularité est évidente, et quitte à faire un changement de variables, on peut supposer sans perte de généralité que $x_0 = 0$. On commence par introduire quelques notations, afin d'alléger les calculs. L'avantage de ces notations est que lorsqu'on calcule des expressions du type $d(a \lrcorner b)$, il faut faire attention au signe de chaque terme. On propose ici des notations qui permettent de séparer le calcul des signes du reste.

On écrit donc pour $I \in \mathcal{I}_{k+1}$ et $j \in I$, $\sigma_\wedge(j, I) \in \{-1, 1\}$ tel que pour tout $a \in \Lambda^1$ et $b \in \Lambda^k$,

$$[a \wedge b]^I = \sum_{j \in I} \sigma_\wedge(j, I) a^j b^{I \backslash \{j\}}.$$

En particulier, on a alors $[db]^I = \sum_{j \in I} \sigma_\wedge(j, I) b_{x_j}^{I \backslash \{j\}}$.

On écrit pour $J \in \mathcal{I}_k$ et $j \notin J$, $\sigma_\lrcorner(j, J) \in \{-1, 1\}$ de telle sorte que pour tout $a \in \Lambda^1$ et $b \in \Lambda^{k+1}$,

$$[a \lrcorner b]^J = \sum_{j \notin J} \sigma_\lrcorner(j, J) a^j b^{J \cup \{j\}}.$$

La démonstration se sépare maintenant en 3 étapes. On commence par établir quelques propriétés dans les notations ci-dessus, puis, on réinterprète l'hypothèse $df = 0$ dans nos notations. Enfin, on montrera le résultat par un calcul direct.

Étape 1 : On a

(i) pour tout $I \in \mathcal{I}_{k+1}$, $j \in I$, $\sigma_\wedge(j, I)$ est l'unique élément de $\{-1, 1\}$ tel que

$$dx^j \wedge dx^{I \backslash \{j\}} = \sigma_\wedge(j, I) dx^I.$$

En particulier, on a pour tout $J \in \mathcal{I}_k$ et $j \notin J$ $dx^j \wedge dx^J = \sigma_\wedge(j, I \cup \{j\}) dx^{I \cup \{j\}}$;

(ii) pour tout $J \in \mathcal{I}_k$ $j \notin I$, $\sigma_\lrcorner(j, J)$ est l'unique élément de $\{-1, 1\}$ tel que

$$dx^j \lrcorner dx^{J \cup \{j\}} = \sigma_\lrcorner(j, J) dx^J.$$

En particulier, on a pour tout $I \in \mathcal{I}_{k+1}$ et $j \in I$, $dx^j \lrcorner dx^I = \sigma_\lrcorner(j, I \backslash \{j\}) dx^{I \backslash \{j\}}$;

(iii) pour tout $I \in \mathcal{I}_{k+1}$ et $j \in I$, $\sigma_\wedge(j, I) \sigma_\lrcorner(j, I \backslash \{j\}) = 1$;

(iv) pour tout $I \in \mathcal{I}_{k+1}$, $j \in I$ et $l \notin I$, on a

$$\sigma_\lrcorner(l, I \backslash \{j\}) \sigma_\wedge(j, I) = -\sigma_\lrcorner(l, I) \sigma_\wedge(j, I \cup \{l\}).$$

Commençons par (i). Pour tout $I \in \mathcal{I}_{k+1}$ et $j \in I$ on a par définition

$$\left[dx^j \wedge dx^{I \backslash \{j\}}\right]^I = \sum_{j' \in I} \sigma_\wedge(j', I) \left[dx^j\right]^{j'} \left[dx^{I \backslash \{j\}}\right]^{I \backslash \{j'\}} = \sigma_\wedge(j, I),$$

qui est le résultat voulu. La preuve de (ii) est en tout point similaire à celle de (i), passons donc à la preuve de (iii). On a, pour $I \in \mathcal{I}_{k+1}$, $j \in I$ et par A.5,

$$dx^I = dx^j \wedge \left(dx^j \lrcorner dx^I\right) + dx^j \lrcorner \underbrace{\left(dx^j \wedge dx^I\right)}_{=0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_{\lrcorner}(j, I\backslash\{j\})\, dx^j \wedge dx^{I\backslash\{j\}} \\
&= \sigma_{\lrcorner}(j, I\backslash\{j\})\, \sigma_{\wedge}(j, I)\, dx^I,
\end{aligned}
$$

d'où $\sigma_{\lrcorner}(j, I\backslash\{j\})\, \sigma_{\wedge}(j, I) = 1$, qui est le résultat voulu. Passons à la preuve de (iv). Soit donc $I \in \mathcal{I}_{k+1}$, $j \in I$, $l \notin I$. Alors, par définition, on a

$$
\begin{aligned}
dx^j \wedge \left(dx^l \lrcorner dx^{(I\backslash\{j\})\cup\{l\}}\right) &= \sigma_{\lrcorner}(l, I\backslash\{j\})\, dx^j \wedge dx^{I\backslash\{j\}} \\
&= \sigma_{\lrcorner}(l, I\backslash\{j\})\, \sigma_{\wedge}(j, I)\, dx^I.
\end{aligned}
$$

D'un autre côté, on a par A.5,

$$
\begin{aligned}
dx^j \wedge \left(dx^l \lrcorner dx^{(I\backslash\{j\})\cup\{l\}}\right) &= \underbrace{\left\langle dx^j, dx^l \right\rangle}_{=0} dx^{(I\backslash\{j\})\cup\{l\}} - dx^l \lrcorner \left(dx^j \wedge dx^{(I\backslash\{j\})\cup\{l\}}\right) \\
&= -\, \sigma_{\wedge}(j, I\cup\{l\})\, dx^l \lrcorner dx^{I\cup\{l\}} \\
&= -\, \sigma_{\wedge}(j, I\cup\{l\})\, \sigma_{\lrcorner}(l, I)\, dx^I.
\end{aligned}
$$

Comparant nos deux expressions, on obtient le résultat et ceci termine notre étape 1.

Étape 2 : On montre que pour tout $I \in \mathcal{I}_{k+1}$ et $l \notin I$,

$$
\sum_{j\in I} \sigma_{\wedge}(j, I\cup\{l\}) \frac{\partial f^{(I\cup\{l\})\backslash\{j\}}}{\partial x_j} = -\sigma_{\wedge}(l, I\cup\{l\}) \frac{\partial f^I}{\partial x_l}.
$$

Avec nos notations, notre hypothèse $df = 0$ donne que pour tout $I' \in \mathcal{I}_{k+2}$,

$$
\sum_{j\in I'} \sigma_{\wedge}(j, I') \frac{\partial f^{I\backslash\{j\}}}{\partial x_j} = 0.
$$

Ainsi, si $I \in \mathcal{I}_{k+1}$ et $l \notin I$, utilisant cette égalité pour $I' = I \cup \{l\}$, on a

$$
0 = \sum_{j\in I} \sigma_{\wedge}(j, I\cup\{l\}) \frac{\partial f^{(I\cup\{l\})\backslash\{j\}}}{\partial x_j} + \sigma_{\wedge}(l, I\cup\{l\}) \frac{\partial f^I}{\partial x_l},
$$

qui est le résultat voulu.

Étape 3 :

Soit $I \in \mathcal{I}_{k+1}$. Alors, on a

$$
\begin{aligned}
[dw]^I &= \int_0^1 \left\{ d\left[x \lrcorner f(tx)\right] t^k \right\}^I dt \\
&= \int_0^1 t^k \sum_{j\in I} \sigma_{\wedge}(j, I) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[x \lrcorner f(tx)\right]^{I\backslash\{j\}} dt.
\end{aligned}
$$

Or, pour tout $J \in \mathcal{I}_k$, on a

$$
\left[x \lrcorner f(tx)\right]^J = \sum_{l\notin J} \sigma_{\lrcorner}(l, J)\, x_l f^{J\cup\{l\}}(tx).
$$

Ainsi,

$$
[dw]^I = \int_0^1 t^k \sum_{j\in I} \sigma_{\wedge}(j, I) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{l\notin I\backslash\{j\}} \sigma_{\lrcorner}(l, I\backslash\{j\})\, x_l f^{(I\backslash\{j\})\cup\{l\}}(tx) \right] dt
$$

$$
= \int_0^1 t^k \sum_{j\in I} \sigma_{\wedge}(j, I) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{l\notin I} \sigma_{\lrcorner}(l, I\backslash\{j\})\, x_l f^{(I\backslash\{j\})\cup\{l\}}(tx) \right]
$$

$$
\begin{aligned}
&+ t^k \sum_{j\in I} \sigma_\wedge (j,I) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_\lrcorner (j, I\backslash\{j\})\, x_j f^I (tx)\right] dt \\
&= \int_0^1 t^k \sum_{l\notin I} \sum_{j\in I} \sigma_\wedge (j,I)\, \sigma_\lrcorner (l, I\backslash\{j\})\, x_l \frac{\partial f^{(I\cup\{l\})\backslash\{j\}}}{\partial x_j} (tx)\, t \\
&\quad + t^k \sum_{j\in I} \sigma_\wedge (j,I)\, \sigma_\lrcorner (j, I\backslash\{j\})\, f^I (tx) \\
&\quad + t^k \sum_{j\in I} \sigma_\wedge (j,I)\, \sigma_\lrcorner (j, I\backslash\{j\})\, x_j \frac{\partial f^I}{\partial x_j} (tx)\, tdt \\
&\overset{(iii)}{=} \int_0^1 t^{k+1} \sum_{l\notin I} \sum_{j\in I} \sigma_\wedge (j,I)\, \sigma_\lrcorner (l, I\backslash\{j\})\, x_l \frac{\partial f^{(I\cup\{l\})\backslash\{j\}}}{\partial x_j} (tx) \\
&\quad + (k+1)\, t^k f^I (tx) + t^{k+1} \sum_{j\in I} x_j \frac{\partial f^I}{\partial x_j} (tx)\, dt \\
&\overset{(iv)}{=} \int_0^1 -t^{k+1} \sum_{l\notin I} \sum_{j\in I} \sigma_\lrcorner (l,I)\, \sigma_\wedge (j, I\cup\{l\})\, x_l \frac{\partial f^{(I\cup\{l\})\backslash\{j\}}}{\partial x_j} (tx) \\
&\quad + (k+1)\, t^k f^I (tx) + t^{k+1} \sum_{j\in I} x_j \frac{\partial f^I}{\partial x_j} (tx)\, dt \\
&= \int_0^1 -t^{k+1} \sum_{l\notin I} x_l \sigma_\lrcorner (l,I) \sum_{j\in I} \sigma_\wedge (j, I\cup\{l\}) \frac{\partial f^{(I\cup\{l\})\backslash\{j\}}}{\partial x_j} (tx) \\
&\quad + (k+1)\, t^k f^I (tx) + t^{k+1} \sum_{j\in I} x_j \frac{\partial f^I}{\partial x_j} (tx)\, dt.
\end{aligned}
$$

Utilisant maintenant l'étape 2, on obtient

$$
\begin{aligned}
[dw]^I &= \int_0^1 t^{k+1} \sum_{l\notin I} x_l \sigma_\lrcorner (l,I)\, \sigma_\wedge (l, I\cup\{l\}) \frac{\partial f^I}{\partial x_l} (tx) \\
&\quad + (k+1)\, t^k f^I (tx) + t^{k+1} \sum_{j\in I} x_j \frac{\partial f^I}{\partial x_j} (tx)\, dt \\
&\overset{(iii)}{=} \int_0^1 t^{k+1} \sum_{l\notin I} x_l \frac{\partial f^I}{\partial x_l} (tx) + (k+1)\, t^k f^I (tx) + t^{k+1} \sum_{j\in I} x_j \frac{\partial f^I}{\partial x_j} (tx)\, dt \\
&= \int_0^1 (k+1)\, t^k f^I (tx) + t^{k+1} \left\langle \nabla f^I (tx), x \right\rangle dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[t^{k+1} f^i (tx)\right] dt = f^I (x),
\end{aligned}
$$

qui est le résultat souhaité.

□

Le théorème suivant vient de [7, Theorem 3.23] et nous servira à établir l'aspect nécessaires de certains problèmes de Dirichlet dans le cas où on n'est pas dans un domaine C^∞.

Théorème A.12.
Soit Ω un ouvert borné de bord C^2, $0 \leqslant k \leqslant n$ et $f \in C^1\left(\overline{\Omega}, \Lambda^k\right)$ tel que $\nu \wedge f = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors, $\nu \wedge df = 0$ sur $\partial\Omega$.

Théorème A.13 (Extension)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord Lipschitz. Alors, il existe un opérateur d'extension linéaire

$$E\colon C^{r,h}\left(\overline{\Omega}\right) \to C_c^{r,h}\left(\mathbb{R}^n\right),$$

pour tout $r \geqslant 0$ et $0 \leqslant h \leqslant 1$. Plus précisément, il existe $C = C\left(r, \Omega\right) > 0$ tel que pour tout $f \in C^{r,h}\left(\Omega\right)$,

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} Ef \subset\subset & \mathbb{R}^n \\ (Ef)\big|_\Omega = & f \\ \|Ef\|_{C^{r,h}(\mathbb{R}^n)} \leqslant & C\,\|f\|_{C^{r,h}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ce théorème d'extension est issu de [7, Theorem 16.11]. Le théorème suivant est très utile pour résoudre les équations aux dérivées partielles du premier ordre. La version ci-dessous est issue de [11, Theorem 16], voir aussi [13].

Théorème A.14.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert bornée de bord Lipschitz et $a \in C^r\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes

(i) pour tout $f \in C^r\left(\overline{\Omega}\right)$, il existe $u \in C^r\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que

$$\langle a, \nabla u\rangle = f$$

dans Ω ;

(ii) pour tout $f, g \in C^r\left(\overline{\Omega}\right)$, il existe $u \in C^r\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que

$$\langle a, \nabla u\rangle + gu = f$$

dans Ω ;

(iii) il existe $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que

$$\langle a, \nabla u\rangle \neq 0$$

dans $\overline{\Omega}$;

(iv) il existe $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que

$$\langle a, \nabla\left[\langle a, \nabla u\rangle\right]\rangle \neq 0$$

dans $\overline{\Omega}$.

Dans certains problèmes de Dirichlet, on déduit que certains objets constant sont 0 en montrant que leur produit (extérieur ou intérieur) avec la normale est 0. Pour que ce dernier fait nous permette de déduire que notre constante est 0, on a besoin de s'assurer que la normale extérieure prend suffisamment de valeurs linéairement indépendantes. Pour répondre à ceci, on peut par exemple utiliser le résultat suivant de [18].

Théorème A.15 (Surjectivité de l'application de Gauss)**.**
Soient $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $S = f^{-1}\left(c\right)$ est une surface compacte, connexe, orientable telle que pour tout $p \in S$ $\nabla f\left(p\right) \neq 0$. Alors, $\nu\colon S \to \partial B_1\left(0\right)$, la normale à la surface est surjective.

A.3 Résultats élémentaires

Théorème A.16 (Lemme de Poincaré avec un paramètre)**.**
Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ *deux ouverts tels que* Ω_1 *est étoilé* $r \geqslant 1$ $0 \leqslant k \leqslant n-1$ *et* $f = f(x,y) \in C^r\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \Lambda^{k+1}\right)$ *tel que pour tout* $y \in \Omega_2$,

$$d_x f(x,y) = 0.$$

Alors, il existe $w \in C^r\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \Lambda^k\right)$ *tel que*

$$d_x w(x,y) = f(x,y)$$

pour tout $(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \Omega_1$ tel que Ω_1 est étoilé par rapport à x_0. On définit $w\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Lambda^k$ par

$$w(x,y) = \int_0^1 (x - x_0) \lrcorner f(x_0 + t(x - x_0), y)\, t^k dt.$$

Alors, $w \in C^r\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \Lambda^k\right)$ et par le théorème A.11, w vérifie

$$d_x w = f,$$

qui est le résultat souhaité. □

Lemme A.17 (Principe de Sélection)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $r \geqslant 0$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *tel que* $v(\Omega) \subset \mathrm{Im}A$. *Alors, il existe* $u \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *tel que*

$$v = Au$$

dans Ω.

De plus,

(i) le résultat reste vrai si toutes les occurrences de Ω *sont remplacées par* $\overline{\Omega}$ *;*

(ii) si $v = 0$ *sur* $\partial\Omega$, *alors* $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$ *;*

(iii) pour $(x_0, c_0, C_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$ *si* $v(x_0) = Ac_0$ *et* $\nabla v(x_0) = AC_0$ *alors*

$$u(x_0) = c_0 \text{ et } \nabla u(x_0) = C_0.$$

Démonstration. On commence par considérer la décomposition de A en valeurs singulières. Soient donc P, Q deux matrices inversibles et $\Sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_m, 0, ..., 0)$ tels que

$$A = P\Sigma Q.$$

Remarquons qu'on a alors $P^{-1}v(\Omega) \subset \mathrm{Im}\Sigma Q$. En particulier, $P^{-1}v(\Omega) \subset \mathrm{Im}\Sigma$, c'est-à-dire,

$$\left[P^{-1}v(x)\right]^i = 0$$

pour tout $i \geqslant m+1$ et $x \in \Omega$. Définissons donc

$$w^i = \begin{cases} \dfrac{\left[P^{-1}v\right]^i}{\lambda_i} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant m \\ \\ 0 & \text{si } m+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Alors, $w \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et on a $\Sigma w = P^{-1}v$. Pour finir, posons $u = Q^{-1}w$. On a bien $u \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et

$$Au = P\Sigma Q Q^{-1} w = P\Sigma w = PP^{-1}v = v.$$

La même construction nous donne les résultats supplémentaires (*i*) et (*ii*). Pour le point (*iii*), on considère alors

$$\tilde{u}(x) := u(x) - \nabla u(x_0)(x - x_0) + C_0(x - x_0) - u(x_0) + c_0.$$

On a alors bien que $\tilde{u}(x_0) = c_0$ et $\nabla \tilde{u}(x_0) = C_0$. De plus, pour tout $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} A\tilde{u}(x) =& Au(x) - A\nabla u(x_0)(x - x_0) + AC_0(x - x_0) - Au(x_0) + Ac_0 \\ =& v - \nabla v(x_0)(x - x_0) + AC_0(x - x_0) - v(x_0) + Ac_0 = v, \end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. □

Lemme A.18.
Soient $\Omega_1 \subsetneq \Omega$ des ouverts avec Ω connexe. Alors, il existe $\overline{x} \in \partial\Omega_1 \cap \Omega$ et $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ un chemin continu tel que $\gamma([a,b[) \subset \Omega_1$ et $\gamma(b) = \overline{x}$.

Démonstration. Soient $x_1 \in \Omega_1$ et $\tilde{x} \in \partial\Omega_1 \cap \Omega$. Vu que Ω est connexe par arcs, il existe $\gamma\colon [a,\beta] \to \Omega$ un chemin continu de x_1 à $\tilde{x}$.

Soit $b := \inf\{t \in [a,\beta] \ : \ \gamma(t) \notin \Omega_1\}$. Alors, par continuité de γ et du fait que Ω_1 est ouvert, on a que $b > a$. De plus, par définition de b, on a que $\overline{x} := \gamma(b) \in \partial\Omega_1$. Et on a donc le résultat. □

Lemme A.19.
Soient Ω_1, Ω, $\overline{x}$ et $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ comme dans le lemme A.18, et $A \in C^1(\Omega_1, \Lambda^0)$ tel que ∇A se prolonge continûment à $\overline{\Omega_1} \cap \Omega$. Alors, A est borné sur $\gamma([a,b[)$.

Démonstration. Il s'agit d'une application directe du théorème fondamental du calcul intégral pour avoir que A est borné par $|A(\gamma(a))| + |\nabla A| \operatorname{long}(\gamma)$. □

Annexe B

Algèbre

Définition B.1 (Pseudo-inverse de Moore-Penrose)**.**
Soient en $n, m \geqslant 1$ des entiers et $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Le *pseudo-inverse de Moore-Penrose de* A, noté $A^\dagger$ est l'unique matrice de taille $m \times n$ qui vérifie

(*i*) $AA^\dagger A = A$;

(*ii*) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$;

(*iii*) $\left(AA^\dagger\right)^t = AA^\dagger$;

(*iv*) $\left(A^\dagger A\right)^t = A^\dagger A$.

L'existence et l'unicité du pseudo-inverse de Moore-Penrose est établie dans [16]. Pour une discussion plus générale sur les inverses généralisés, voir [1]. L'intérêt du pseudo inverse de Moore-Penrose est qu'il nous permettra de décrire les solutions du problème algébrique qui consiste à trouver X, une matrice telle que $AX + X^tA = F$. Ces formules rendent alors les démonstrations plus élégantes.

On commence par quelques résultats utiles sur le pseudo-inverse de Moore-Penrose.

Proposition B.2.
Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Alors,*

(i) $(A^t)^\dagger = \left(A^\dagger\right)^t$ *;*

(ii) si A *est inversible, alors,* $A^\dagger = A^{-1}$ *;*

(iii) si A *est symétrique ou antisymétrique,* $A^\dagger A = AA^\dagger$*.*

Démonstration. La preuve des deux premières propriétés découle de la définition, tandis que la dernière découle du fait que pour toutes matrices B, C, $(BC)^t = C^tB^t$, que $AA^\dagger$ est symétrique et de (i). □

Lemme B.3.
Soient $A, F \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Alors,*

$$\left(I - AA^\dagger\right) F \left(I - A^\dagger A\right) = 0$$

si et seulement si pour tout $\xi \in \mathrm{Ker}A$ *et* $\eta \in \mathrm{Ker}A^t$*,*

$$\langle F\xi, \eta\rangle = 0.$$

Démonstration. La preuve repose sur le fait qu'en réalité, $I - A^\dagger A$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}A$ tandis que $I - AA^\dagger$ est le projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}A^t$.

Commençons par supposer que

$$\left(I - AA^\dagger\right) F \left(I - A^\dagger A\right) = 0.$$

Soit donc $\xi \in \mathrm{Ker}A$ et $\eta \in \mathrm{Ker}A^t$. Alors, par hypothèse, on a

$$\begin{aligned}\langle F\xi, \eta\rangle &= \left\langle AA^\dagger F\xi, \eta\right\rangle + \left\langle FA^\dagger A\xi, , \eta\right\rangle - \left\langle AA^\dagger FA^\dagger A\xi, \eta\right\rangle \\ &= \left\langle A^\dagger F\xi, A^t\eta\right\rangle = 0,\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Passons à la réciproque. On va montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left\langle \left(I - AA^\dagger\right) F \left(I - A^\dagger A\right) x, y\right\rangle = 0,$$

ce qui nous donnera le résultat. Or, remarquons que

$$A\left(I - A^\dagger A\right) x = (A - A)\, x = 0,$$

d'où $\left(I - A^\dagger A\right) x \in \mathrm{Ker}A$ et

$$A^t\left(I - \left(A^t\right)^\dagger A^t\right) y = \left(A^t - A^t\right) y = 0,$$

d'où $\left(I - (A^t)^\dagger A^t\right) y \in \mathrm{Ker}A^t$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\left\langle \left(I - AA^\dagger\right) F \left(I - A^\dagger A\right) x, y\right\rangle &= \left\langle F\left(I - A^\dagger A\right) x, \left(I - \left(AA^\dagger\right)^t\right) y\right\rangle \\ &= \left\langle F\left(I - A^\dagger A\right) x, \left(I - \left(A^t\right)^\dagger A^t\right) y\right\rangle = 0,\end{aligned}$$

par hypothèse. □

Dans les théorèmes suivants, on donne des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour l'existence de solutions du problème algébrique $AX + X^tA = F$. L'idée d'introduire le pseudo inverse de Moore-Penrose est venue en prenant connaissance des résultats de [12], qui donne des résultats plus précis que ce dont on a besoin ici.

Théorème B.4 (L'équation $AX + X^tA = F$ avec hypothèse de symétrie sur A)**.**
Soient $A, F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\sigma \in \{-1, 1\}$ tels que $A^t = \sigma A$ et $F^t = \sigma F$, c'est-à-dire A et F sont tous deux soit symétriques soit antisymétriques. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes

(i) Il existe $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une solution de

$$AX + X^tA = F; \tag{B.1}$$

(ii) pour tout $\xi, \eta \in \mathrm{Ker}A$, $\langle F\xi, \eta\rangle = 0$;

(iii) $\left(I - AA^\dagger\right) F \left(I - A^\dagger A\right) = 0$, où $A^\dagger$ dénote le pseudo-inverse de Moore-Penrose de A.

En particulier, si A est inversible, alors (B.1) *a toujours une solution et quelle que soit $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une solution de cette équation, il existe $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $\Phi^t = -\sigma\Phi$ (c'est-à-dire, si A et F sont symétriques, alors Φ est antisymétrique et vice versa) et tel que*

$$X = \frac{1}{2}A^{-1}(F + \Phi).$$

Démonstration. Par le lemme B.3, (*ii*) et (*iii*) sont équivalentes. On va montrer que (*i*) est équivalent à (*iii*). La preuve ainsi est plus élégante, mais plus obscure. On discutera sous forme de remarque les arguments qui constituent la démonstration du fait que (*i*) est équivalent à (*ii*). En effet, cette preuve est plus directe donc apporte une meilleure compréhension du problème mais elle est moins élégante.

Commençons par supposer que (i) est vérifié. Alors, on a

$$\begin{aligned}\left(I - AA^\dagger\right) F \left(I - A^\dagger A\right) &= \left(I - AA^\dagger\right)\left(AX + X^t A\right)\left(I - A^\dagger A\right) \\ &= \underbrace{\left(I - AA^\dagger\right) A}_{=0} X \left(I - A^\dagger A\right) + \left(I - AA^\dagger\right) X^t \underbrace{A\left(I - A^\dagger A\right)}_{=0} = 0,\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Passons à la réciproque. Cette preuve est donnée chez [12]. Soit $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice quelconque et $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$, une solution de $A\left(Z + Z^t\right) A = 0$ (par exemple, $Z = 0$ fait l'affaire). Posons

$$X = \frac{1}{2} A^\dagger F A^\dagger A + A^\dagger F \left(I - A^\dagger A\right) + \left(I - A^\dagger A\right) Y + A^\dagger A Z A.$$

Alors,

$$\begin{aligned}X^t =& \frac{\sigma^2}{2} A^\dagger A F A^\dagger + \sigma^2 \left(I - A^\dagger A\right) F A^\dagger + Y^t \left(I - AA^\dagger\right) + A Z^t A A^\dagger \\ =& \frac{1}{2} A^\dagger A F A^\dagger + \left(I - A^\dagger A\right) F A^\dagger + Y^t \left(I - AA^\dagger\right) + A Z^t A A^\dagger.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}AX + X^t A =& \frac{1}{2} AA^\dagger F A^\dagger + AA^\dagger F \left(I - A^\dagger A\right) + \underbrace{A\left(I - A^\dagger A\right)}_{=0} Y + AA^\dagger A Z A \\ & + \frac{1}{2} A^\dagger A F A^\dagger A + \left(I - A^\dagger A\right) F A^\dagger A + Y^t \underbrace{\left(I - AA^\dagger\right) A}_{=0} + A Z^t A A^\dagger A \\ =& - A^\dagger A F A^\dagger A + A^\dagger A F + F A^\dagger A + \underbrace{A\left(Z + Z^t\right) A}_{=0} \\ =& F - \left(I - A^\dagger A\right) F \left(I - A^\dagger A\right) = F,\end{aligned}$$

ce qui termine de montrer que les trois propriétés sont équivalentes.

Pour terminer la démonstration, il faut encore décrire toutes les solutions dans le cas où A est inversible. Soit donc X une solution de (B.1). On définit

$$\Phi := AX - X^t A.$$

Alors, Φ vérifie les propriétés souhaitées.

$\square$

Remarque B.5. (i) Il existe une preuve directe du fait que (ii) implique (i), qui consiste à diagonaliser A pour ramener le problème au cas où A a la forme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et F vérifie $F^{ij} = 0$ pour tout $k+1 \leqslant i, j \leqslant n$. L'équation s'écrit alors

$$\left(\begin{array}{c|c} (\Lambda)_{1:k}^{1:k}(X)_{1:k}^{1:k} + \left((X)_{1:k}^{1:k}\right)^t (\Lambda)_{1:k}^{1:k} & (\Lambda)_{1:k}^{1:k}(X)_{k+1:n}^{1:k} \\ \hline \left((X)_{k+1:n}^{1:k}\right)^t (\Lambda)_{1:k}^{1:k} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} (F)_{1:k}^{1:k} & (F)_{k+1:n}^{1:k} \\ \hline (F)_{1:k}^{k+1:n} & 0 \end{array}\right)$$

où pour toute matrice M, $(M)_{k:l}^{i:j}$ dénote la sous matrices de M qui contient les éléments qui sont sur les lignes i à j et les colonnes k à l. En particulier

$$(\Lambda)_{1:k}^{1:k} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

qui est inversible. Remarquons de plus, que par hypothèse, $F^t = F$. Donc,

$$\left((F)_{k+1:n}^{1:k}\right)^t = (F)_{1:k}^{k+1:n}.$$

Et donc, les équations dans le cadrant en haut à droite sont équivalentes aux équations dans le cadrant en bas à gauche.

Le résultat découle alors du fait que si A est inversible, les solutions de $AX + X^tA = F$ existent toujours si F est symétrique et sont données par $X = A^{-1}(F + \Phi)$, où Φ est une matrice antisymétrique quelconque ;

(*ii*) dans [12], les résultats sont que toutes les solutions de (B.1) sont données par la formule pour X dans la preuve.

Théorème B.6 (L'équation $AX + X^tA = F$ sans hypothèse de symétrie sur A)**.**
Soient $A, F \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On écrit, pour une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M_s = \frac{1}{2}(M + M^t)$ pour sa partie symétrique et $M_a = \frac{1}{2}(M - M^t)$, sa partie antisymétrique.

Conditions nécessaires

(*i*) *Si il existe $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, une solution de*

$$AX + X^tA = F, \tag{B.2}$$

alors

(*a*) *pour tout $\xi, \eta \in \mathrm{Ker}A_s$, $\langle F_s\xi, \eta\rangle = 0$;*

(*b*) *pour tout $\xi, \eta \in \mathrm{Ker}A_a$, $\langle F_a\xi, \eta\rangle = 0$;*

(*c*) *pour tout $\xi \in \mathrm{Ker}A$ et $\eta \in \mathrm{Ker}A^t$, $\langle F\xi, \eta\rangle = 0$;*

(*ii*) *si A_s et A_a sont inversibles, que*

$$(\det A_a)^2 A_sA_a^{-1} = (\det A_s)^2 A_aA_s^{-1},$$

et qu'il existe X une solution de (B.2)*, alors*

$$A_sA_a^{-1}F_a + F_aA_a^{-1}A_s = F_s + A_aA_s^{-1}\frac{F_s}{2}A_aA_s + A_sA_a^{-1}\frac{F_s}{2}A_s^{-1}A_a \tag{B.3}$$

Conditions suffisantes

(*iii*) *Si A_s et A_a sont inversibles et que* (B.3) *est vérifiée, alors,* (B.2) *admet une solution.*

(iv) Si A_s est inversible et que

$$F_a = A_a A_s^{-1} \frac{F_s}{2} + \frac{F_s}{2} A_s^{-1} A_a, \tag{B.4}$$

alors, (B.2) *admet une solution.*

Démonstration. Commençons par le preuve de (i).

Soit $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une solution de (B.2). Alors, identifiant partie symétrique et antisymétrique de notre équation, on obtient que

$$\begin{cases} A_s X + X^t A_s = F_s \\ A_a X + X^t A_a = F_a \end{cases}$$

Ainsi, par le théorème B.4, on a que pour tout pour tout $\xi, \eta \in \mathrm{Ker} A_s$, $\langle F_s \xi, \eta \rangle = 0$ et pour tout $\xi, \eta \in \mathrm{Ker} A_a$, $\langle F_a \xi, \eta \rangle = 0$. De plus, pour tout $\xi \in \mathrm{Ker} A$ et $\eta \in \mathrm{Ker} A^t$, on a

$$\langle F\xi, \eta \rangle = \left\langle X\xi, A^t \eta \right\rangle + \left\langle X^t A \xi, \eta \right\rangle = 0,$$

ce qui termine la démonstration de (i).

Passons à la preuve de (ii).

On a

$$\begin{aligned} A_s A_a^{-1} F_a + F_a A_a^{-1} A_s =& A_s A_a^{-1} \left(A_a X + X^t A_a \right) + \left(A_a X + X^t A_a \right) A_a^{-1} A_s \\ =& A_s X + A_s A_a^{-1} X^t A_a + A_a X A_a^{-1} A_s + X^t A_s. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} F_s + A_a A_s^{-1} \frac{F_s}{2} A_a A_s + A_s A_a^{-1} \frac{F_s}{2} A_s^{-1} A_a =& F_s + A_a A_s^{-1} \frac{F_s}{2} A_a^{-1} A_s \\ &+ \left(\frac{\det A_s}{\det A_a} \right)^2 \left(\frac{\det A_a}{\det A_s} \right)^2 A_a A_s^{-1} \frac{F_s}{2} A_a^{-1} A_s \\ =& F_s + A_a A_s^{-1} F_s A_a^{-1} A_s \\ =& A_s X + X^t A_s + A_a A_s^{-1} A_s X A_a^{-1} A_s \\ &+ A_a A_s^{-1} X^t A_s A_a^{-1} A_s \\ =& A_s X + X^t A_s + A_a X A_a^{-1} A_s \\ &+ \left(\frac{\det A_s}{\det A_a} \right)^2 \left(\frac{\det A_a}{\det A_s} \right)^2 A_s A_a^{-1} X^t A_a, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Passons à la démonstration de (iii).

Soit $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique telle que $H A_a^{-1} A_s - A_s A_a^{-1} H = 0$ (par exemple, $H = 0$ fait l'affaire.) On pose

$$X = A_s^{-1} \frac{F_s}{4} + A_a^{-1} \frac{F_a}{2} - A_a^{-1} \frac{F_s}{4} A_s^{-1} A_a + A_a^{-1} H.$$

Alors,

$$\begin{aligned} A_s X + X^t A_s =& \frac{F_s}{4} + A_s A_a^{-1} \frac{F_a}{2} - A_s A_a^{-1} \frac{F_s}{4} A_s^{-1} A_a + A_s A_a^{-1} H \\ &+ \frac{F_s}{4} + \frac{F_a}{2} A_a^{-1} A_s - A_a A_s^{-1} \frac{F_s}{4} A_a^{-1} A_s - H A_a^{-1} A_s \\ =& \frac{F_s}{2} + \frac{1}{2} \left(A_s A_a^{-1} F_a + F_a A_a^{-1} A_s - A_s A_a^{-1} \frac{F_s}{2} A_s^{-1} A_a - A_a A_s^{-1} \frac{F_s}{2} A_a^{-1} A_s \right) \\ =& F_s. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} A_aX + X^tA_a =& A_aA_s^{-1}\frac{F_s}{4} + \frac{F_a}{2} - \frac{F_s}{4}A_s^{-1}A_a + H \\ &+ \frac{F_s}{4}A_s^{-1}A_a + \frac{F_a}{2} - A_aA_s^{-1}\frac{F_s}{4} - H \\ =& F_a, \end{aligned}$$

ce qui montre que X est une solution de (B.2).

Pour terminer la preuve, on montre (*iv*).

On pose

$$X = \frac{1}{2}A_s^{-1}F_s.$$

Alors, de façon évidente, $A_sX + X^tA_s = F$ et on a $A_aX + X^tA_a = A_aA_s^{-1}\frac{F_s}{2} + \frac{F_s}{2}A_s^{-1}A_a = F_a$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque B.7.
L'hypothèse $(\det A_a)^2 A_sA_a^{-1} = (\det A_s)^2 A_aA_s^{-1}$ peut être remplacée par le fait qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda A_sA_a^1 = \mu A_aA_s^{-1}$. Passant au déterminant, et utilisant le fait que A_s et A_a sont inversibles, on a nécessairement que $\lambda = (\det A_a)^2$ et $\mu = (\det A_s)^2$.

Proposition B.8 (Une décomposition de matrices en blocs)**.**
Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice de rang l. Alors, il existe $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, une matrice orthogonale et $A_l \in \mathbb{R}^{l\times l}$ une matrice inversible telle que

$$PAP^t = \begin{bmatrix} A_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si et seulement si $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}A^t$.

En particulier, le résultat est toujours vrai si A est symétrique ou antisymétrique.

Démonstration. Commençons par supposer que $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}A^t$. Alors, il existe $\{b_1, ..., b_n\}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ telle que $\{b_1, .., b_l\}$ est une base orthonormale de $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \mathrm{Im}A^t = \mathrm{Im}A$ et $\{b_{l+1}, ..., b_n\}$ est une base orthonormale de $\mathrm{Ker}A$. Soit maintenant

$$P = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

où on voit b_i comme un vecteur ligne. Plus précisément, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $P^{ij} = (b_i)_j$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \left(PAP^t\right)^{ij} &= \sum_{k,m=1}^{n} P^{ik}A^{km}P^{jm} \\ &= \sum_{k,m=1}^{n} (b_i)_k A^{km} (b_j)_m \\ &= \langle b_i, Ab_j\rangle . \end{aligned}$$

Ainsi, si $j \geqslant l + 1$, on a $b_j \in \mathrm{Ker}A$ et donc $(PAP^t)^{ij} = 0$. De plus, on a

$$\mathrm{Ker}A^t = \left(\left(\mathrm{Ker}A^t\right)^\perp\right)^\perp = (\mathrm{Im}A)^\perp = \left(\mathrm{Im}A^t\right)^\perp = \mathrm{Ker}A.$$

Ainsi, si $i \geqslant l + 1$, on a $(PAP^t)^{ij} = \langle A^tb_i, b_j\rangle = 0$. On a donc bien que PAP^t est de la forme

$$PAP^t = \begin{bmatrix} A_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $A_l \in \mathbb{R}^{l\times l}$. Montrons maintenant que A_l est inversible. À cette fin, on montre que la multiplication à gauche par A_l est surjective. Soit donc $y \in \mathbb{R}^l$ quelconque. Posons $\tilde{y} = (y_1, ..., y_l, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\left(P^t\tilde{y}\right)_i = \sum_{k=1}^{n} \left(P^t\right)^{ik} \tilde{y}_k = \sum_{k=1}^{l} (b_k)_i \, \tilde{y}_k,$$

d'où, on a que $P^t\tilde{y} = \sum_{k=1}^{l} y_k b_k \in \mathrm{Im}A$. Soit donc $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $P^t\tilde{y} = Az$, et posons $\tilde{x} = Pz \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$\begin{bmatrix} A_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} = PAP^t\tilde{x} = PAz = \tilde{y}.$$

Ainsi, si $x = (x_1, ..., x_l)$, on a

$$A_l x = y.$$

Le vecteur y étant quelconque, ceci montre la surjectivité et termine cette partie de la démonstration.

Passons à la réciproque. Commençons par remarquer que

$$\mathrm{Im} \begin{bmatrix} A_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^l \times \{0\} \times ... \times \{0\} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} A_l^t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}A =& A\mathbb{R}^n \\ =& P^t \begin{bmatrix} A_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{P\mathbb{R}^n}_{=\mathbb{R}^n} \\ =& P^t \mathrm{Im} \begin{bmatrix} A_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ =& P^t \mathrm{Im} \begin{bmatrix} A_l^t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ =& \mathrm{Im}A, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

$\square$

Annexe C

Notations

On regroupe ici les différentes notations utilisées tout au long de cette thèse.

e^i	le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui est 1.
$\mathcal{I}_k$	l'ensemble des multi indices ordonnés de longueur k.
$\wedge$	le produit extérieur.
$\lrcorner$	le produit intérieur.
d, δ	les dérivées extérieures et intérieures. Voir définition A.1.
L_a^k	pour a une 1 forme, l'opérateur différentiel qui à une k forme différentielle associe $dw + a \wedge w$. Voir partie I.
$\bigwedge_{i=1}^{l} f_i$	pour $\{f_i\}_{i=1}^{l}$ des formes différentielles, $f_1 \wedge f_2 \wedge .. \wedge f_n$.
$\mathrm{Anh}_k(\alpha)$	l'ensemble des k formes ϕ telles que $\alpha \wedge \phi = 0$.
$\mathrm{rang}[\alpha]$	pour α une 2 forme, le rang de l'application $\cdot \lrcorner \alpha \colon \Lambda^1 \to \Lambda^1$ qui à une 1 forme ϕ associe $\phi \lrcorner \alpha$. Voir définition A.6.
ν	la normale extérieure au bord d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
$C^r(\Omega)$	pour $0 \leqslant r < \infty$, l'espace des fonctions continues dont toutes les dérivées d'ordre r ou moins sont continues. De plus, $C^\infty(\Omega) = \cap_{r \geqslant 0} C^r(\Omega)$.
$C^r\left(\overline{\Omega}\right)$	l'espace des fonctions qui se prolongent continûment ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre k ou moins jusqu'au bord de Ω .
$C^{0,h}\left(\overline{\Omega}\right)$	le sous espace de $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ des fonctions f pour lesquelles il existe $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in \overline{\Omega}$, $\lvert f(x) - f(y) \rvert \leqslant C \lvert x - y \rvert^h$.
$C^{r,h}\left(\overline{\Omega}\right)$	le sous espace de $C^r\left(\overline{\Omega}\right)$ des fonctions dont les dérivées d'ordre r appartiennent à $C^{0,h}\left(\overline{\Omega}\right)$.
$C_c^r(\Omega)$	le sous espace de $C^r\left(\overline{\Omega}\right)$ des fonctions dont le support est un sous-ensemble compact de Ω.
$W^{1,p}(\Omega)$	l'espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées au sens des distributions est dans $L^p(\Omega)$.
$C^r(\Omega, X)$	pour $X = \mathbb{R}^n$ ou Λ^k, l'espace des fonctions de Ω dans X dont toutes les composantes sont dans $C^r(\Omega)$.
$C^r\left(\overline{\Omega}, X\right)$	pour $X = \mathbb{R}^n$ ou Λ^k, l'espace des fonctions de Ω dans X dont toutes les composantes sont dans $C^r\left(\overline{\Omega}\right)$.
$C^{r,h}\left(\overline{\Omega}, X\right)$	pour $X = \mathbb{R}^n$ ou Λ^k, l'espace des fonctions de Ω dans X dont toutes les composantes sont dans $C^{r,h}\left(\overline{\Omega}\right)$.

$W^{1,p}(\Omega, X)$	pour $X = \mathbb{R}^n$ ou Λ^k, l'espace des fonctions de Ω dans X dont toutes les composantes sont dans $W^{1,p}(\Omega, X)$.
$\mathrm{Diff}^r(U, V)$	pour U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des fonctions $\varphi \colon U \to V$ qui sont inversible, dans $C^r(U, \mathbb{R}^n)$ et dont l'inverse est dans $C^r(V, \mathbb{R}^n)$.
$\mathcal{H}_T(\Omega, X)$	pour $X = \mathbb{R}^n$ ou Λ^k, l'espace des applications ou k formes harmoniques et dont la partie tangentielle s'annule sur le bord de Ω. Voir définition A.3.
$\mathcal{H}_N(\Omega, X)$	pour $X = \mathbb{R}^n$ ou Λ^k, l'espace des applications ou k formes harmoniques et dont la partie normale s'annule sur le bord de Ω. Voir définition A.3.
$C^r(\Omega, \mathrm{Anh}_{k-1}(da))$	l'ensemble des $(k-1)$ formes $w \in C^r\left(\Omega, \Lambda^{k-1}\right)$ telles que $da \wedge w = 0$ dans Ω.
$\lvert X \rvert$	la norme euclidienne de X si X est un vecteur, la mesure de Lebesgue de X si X est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, le cardinal de X si X est un ensemble fini.
$\lfloor X \rfloor$	la partie entière inférieure de $X \geqslant 0$ est définie par $\max\{j \in \mathbb{N} \, : \, j \leqslant X\}$.
$\begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix}$	le coefficient binomial est définit par $\frac{l!}{i!(l-i)!}$.
$A^\dagger$	le pseudo-inverse de Moore-Penrose. Voir définition B.1.
$\mathcal{D}, \mathcal{N}$	les potentiels de Dirichlet et de Neumann. Voir notation 6.1.
π_-, π_+	dans l'étude des domaines C^r-a-simples, les projections sur certaines parties du bord. Voir proposition 10.8 si a est constant, et définition 10.14 si a n'est pas constant.

Bibliographie

[1] Adi B.-I. et G. Thomas. *Generalized inverses : theory and applications*, volume 15 of *CMS books in mathematics*. Springer, New York, 2nd ed. edition, 2003.

[2] S. Bandhyopadyay, B. Dacorogna et D. Strütt. On the equation $a\nabla u + (\nabla u)^t\, a = g$. soumis.

[3] P. Bousquet et G. Csató. On the problem $\operatorname{div} u + \langle a; u\rangle = f$. 2018. en préparation.

[4] P. G. Ciarlet. *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2013.

[5] E.A. Coddington et N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill Book Company, 1955.

[6] G. Csató et B. Dacorogna. A Dirichlet problem involving the divergence operator. *Annalyes de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non-Linéaire*. 2016.

[7] G. Csató, B. Dacorogna et O. Kneuss. *The Pullback Equation for Differential Forms*, volume 83 of *Progess in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, 2012.

[8] G. Csató, B. Dacorogna et O. Kneuss. The second order pullback equation. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 49 :583–611, 2014.

[9] B. Dacorogna. Poincaré lemma in a star shaped domain. 2016. `http://caa.epfl.ch/publications/2016_Poincare(anglais).pdf`.

[10] B. Dacorogna, N. Fusco et L. Tartar. On the solvability of the equation $\operatorname{div} u = f$ in L^1 and in C^0. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni*, 14(3) :239–245, 9 2003.

[11] B. Dacorogna, O. Kneuss et W. Neves. Some remarks on the lie derivative ans the pullback equation for contact forms. *Advanced nonlinear Studies*, 17 :269–282.

[12] D.S. Djordjević. Explicit solution of the operator equation $A^*X + X^*A = B$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200 :701–704, 2007.

[13] J. J. Duistermaat et L. Hörmander. *Fourier Integral Operators. II*, pages 129–215. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1994.

[14] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Birkhäuser, second edition, 1982.

[15] L. D. Landau et E. M. Lifšic. *Theory of elasticity*, volume 7 of *Course of theoretical physics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 3rd edition, 1999.

[16] R. Penrose. A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(3) :406–413, 1955.

[17] D. Strütt. On a generalization of the Poincaré lemma to equations of the type $dw + a \wedge w = f$. *Differential and Integral Equations*, 31(5/6) :353–374, 05 2018.

[18] J. A. Thorpe. *Elementary topics in differential geometry*. Undergraduate texts in mathematics. Springer, New York a.o, 1979.

[19] C. Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*, volume 1 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 2002.

Curriculum Vitae

David Strütt

Tel : +41 21 693 20 94
E-mail : david.strutt@epfl.ch

Date de naissance : 4 avril 1990
Nationalité : suisse

Éducation

2014-2018	Doctorat à l'EPFL, Lausanne, Suisse.
2012-2014	Master en mathématiques théoriques à l'EPFL, Lausanne, Suisse

Publications

- D. Strütt. On a generalization of the Poincaré lemma to equations of the type $dw + a \wedge w = f$. *Differential and Integral Equations*, 31(5/6) :353-374, 05 2018.
- S. Bandhyopadyay, B. Dacorogna et D. Strütt. On the equation $A\nabla u + (\nabla u)^t A = G$. soumis.

Enseignement

2012-2019	Assistant pour le cours d'Analyse III et IV pour mathématiciens à l'EPFL, supervision de quatre projets de semestre.